

**PHẦN I: ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH****CHƯƠNG I****ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT  
VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ****I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ****1. Định nghĩa:**

Hàm số  $f$  đồng biến trên  $K \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$

Hàm số  $f$  nghịch biến trên  $K \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$

**2. Điều kiện cần:**

Giả sử  $f$  có đạo hàm trên khoảng  $I$ .

a) Nếu  $f$  đồng biến trên khoảng  $I$  thì  $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$

b) Nếu  $f$  nghịch biến trên khoảng  $I$  thì  $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$

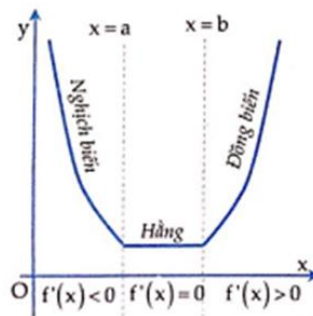
**3. Điều kiện đủ:**

Giả sử  $f$  có đạo hàm trên khoảng  $I$ .

a) Nếu  $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$  ( $f'(x) = 0$  tại một số hữu hạn điểm) thì  $f$  đồng biến trên  $I$ .

b) Nếu  $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$  ( $f'(x) = 0$  tại một số hữu hạn điểm) thì  $f$  nghịch biến trên  $I$ .

c) Nếu  $f'(x) = 0, \forall x \in I$  thì  $f$  không đổi trên  $I$ .



**Chú ý:** Nếu khoảng  $I$  được thay bởi **đoạn** hoặc **nửa khoảng** thì  $f$  phải **liên tục** trên đoạn

**VẤN ĐỀ 1: Xét chiều biến thiên của hàm số**

Để xét chiều biến thiên của hàm số  $y = f(x)$ , ta thực hiện các bước như sau:

- Tìm tập xác định của hàm số.
- Tính  $y'$ . Tìm các điểm mà tại đó  $y' = 0$  hoặc  $y'$  không tồn tại (gọi là các điểm tới hạn)
- Lập bảng xét dấu  $y'$  (bảng biến thiên). Từ đó kết luận các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

**➤ Chú ý:**

- Đối với hàm số nhất biến, không cho  $y' = 0$  (Vì  $y'$  luôn dương hoặc luôn âm với mọi  $x$  thuộc tập xác định).
- Dấu của tam thức bậc hai:  $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ).
  - ✓ Nếu  $P(x) = 0$  có hai nghiệm thì  $P(x)$  “Trong trái ngoài cùng”.
  - ✓ Nếu  $P(x) = 0$  có nghiệm kép thì  $P(x)$  luôn cùng dấu với  $a$ . Với mọi  $x$  khác nghiệm kép)
  - ✓ Nếu  $P(x) = 0$  vô nghiệm thì  $P(x)$  luôn cùng dấu với  $a$ . (Với mọi  $x \in \mathbb{R}$ )

**CÁC VÍ DỤ MẪU**

**Ví dụ 1.** Xét tính đơn điệu của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 2.** Xét chiều biến thiên của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 3.** Xét sự đồng biến nghịch biến của hàm số  $y = -x^3 + 2x^2 - 4x + 3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 4.** Tìm khoảng đơn điệu của hàm số  $y = x^4 - 3x^2 + 4$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 5.** Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số  $y = -x^4 - 2x^2 + 5$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 6.** Xét tính đơn điệu của hàm số  $y = \frac{2x-1}{x+1}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 7.** Xét tính đơn điệu của hàm số  $\sqrt{3x-x^2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 8.** Xét tính đơn điệu của các hàm số  $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**A. BÀI TẬP TỰ LUẬN****Bài 1.** Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

a)  $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$

b)  $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$

c)  $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

d)  $y = (4-x)(x-1)^2$

e)  $y = -x^4 - 2x^2 + 3$

f)  $y = x^4 - 2x^2 - 2$

**Bài 2.** Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

a)  $y = \frac{2x-1}{x+5}$

b)  $y = \frac{x-1}{2-x}$

c)  $y = 1 - \frac{1}{1-x}$

d)  $y = \frac{2x^2 + x + 26}{x+2}$

e)  $y = -x + 3 - \frac{1}{1-x}$

f)  $y = \frac{4x^2 - 15x + 9}{3x}$

**Bài 3.** Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

a)  $y = x\sqrt{2-x^2}$

b)  $y = \sqrt{2x-x^2}$

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****Câu 1:** Cho hàm số  $f(x)$  đồng biến trên tập số thực  $\mathbb{R}$ , mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Với mọi  $x_1 > x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

B. Với mọi  $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

C. Với mọi  $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

D. Với mọi  $x_1 < x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

**Câu 2:** Hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$  luôn đồng biến trên  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi

A.  $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - ac < 0 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

D.  $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

**Câu 3:** Hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$  đồng biến trên mỗi khoảng:

A.  $(-1; 3)$  và  $(3; +\infty)$ .

B.  $(-\infty; -1)$  và  $(1; 3)$ .

C.  $(-\infty; 3)$  và  $(3; +\infty)$ .

D.  $(-\infty; -1)$  và  $(3; +\infty)$ .

**Câu 4:** Hàm số  $y = 2x^3 + 3x^2 + 5$  nghịch biến trên khoảng nào?

A.  $(-\infty; -1)$ .

B.  $(-1; 0)$ .

C.  $(0; +\infty)$ .

D.  $(-3; 1)$ .

**Câu 5:** Hàm số  $y = -x^4 + 4x^2 - 2$  nghịch biến trên mỗi khoảng nào sau đây?

A.  $(-\sqrt{2}; 0)$  và  $(\sqrt{2}; +\infty)$ .

B.  $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ .

C.  $(\sqrt{2}; +\infty)$ .

D.  $(-\infty; -\sqrt{2})$  và  $(0; \sqrt{2})$ .

**Câu 6:** Cho hàm số  $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-2; 0)$  và  $(2; +\infty)$ .

B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$  và  $(2; +\infty)$ .

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$  và  $(0; 2)$ .

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .

**Câu 7:** Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên các khoảng xác định của chúng

A.  $y = x^3 + 3x$ .

B.  $y = \frac{x-2}{x-1}$ .

C.  $y = \frac{2x-3}{3x-5}$ .

D.  $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ .

**Câu 8:** Hàm số nào sau đây luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của chúng

A.  $y = \frac{2}{x}$ .

B.  $y = \frac{2x+3}{x-1}$ .

C.  $(-1;1)$ .

D.  $y = x + \frac{10}{x}$ .

**Câu 9:** Hàm số nào sau đây đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó:

A.  $y = \frac{x-1}{x-2}$

B.  $y = \frac{x-1}{x+2}$

C.  $y = \frac{2x-1}{x-2}$

D.  $y = \frac{2x+5}{x+2}$

**Câu 10:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như sau

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**

|      |           |      |     |     |           |     |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ |           | $+$  | $0$ | $-$ | $0$       | $+$ |

A. Hàm số đồng biến trên khoảng

B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty;0)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0;2)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty;-2)$

**Câu 11:** Cho hàm số  $y = f(x)$  (có bảng biến thiên), đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

|      |           |      |      |      |           |
|------|-----------|------|------|------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$  | $1$  | $+\infty$ |
| $y'$ |           | 0    | 0    | 0    |           |
| $y$  | $-\infty$ | $-1$ | $-2$ | $-1$ | $-\infty$ |

A.  $(1;+\infty)$ .

B.  $(-1;0)$ .

C.  $(-\infty;1)$ .

D.  $(0;1)$ .

**Câu 12:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $y = -2f(x)$  đồng biến trên khoảng

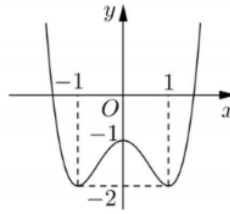
A.  $(2;+\infty)$ .

B.  $(0;3)$ .

C.  $(-\infty;1)$ .

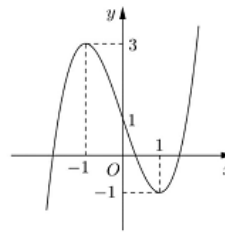
D.  $(0;1)$ .

**Câu 13:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A.  $(0;1)$ .                      B.  $(-\infty;-1)$ .                      C.  $(-1;1)$ .                      D.  $(-1;0)$ .

**Câu 14:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(0;1)$ .                      B.  $(-\infty;-1)$ .                      C.  $(-1;2)$ .                      D.  $(1;+\infty)$ .

**Câu 15:** Hàm số  $y = \sqrt{x - x^2}$  nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

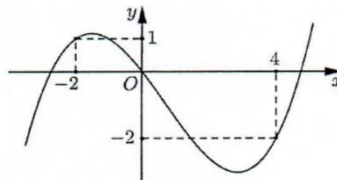
- A.  $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$                       B.  $\left(0; \frac{1}{2}\right)$                       C.  $(-\infty; 0)$                       D.  $(1; +\infty)$

**Câu 16:** Hàm số  $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$  nghịch biến trên khoảng

- A.  $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ .                      B.  $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$                       C.  $(-\infty; +\infty)$ .                      D.  $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$  và  $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$

**Câu 17. (câu 50 minh họa 2020)** Cho hàm số  $f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên.

Hàm số  $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A.  $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ .                      B.  $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ .                      C.  $(-2; -1)$ .                      D.  $(2; 3)$ .

**VẤN ĐỀ 2: Tìm điều kiện để hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến  
trên tập xác định (hoặc trên từng khoảng xác định)**

Cho hàm số  $y = f(x, m)$ ,  $m$  là tham số, có tập xác định  $D$ .

- Hàm số  $f$  đồng biến trên  $D \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in D$ .
- Hàm số  $f$  nghịch biến trên  $D \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in D$ .

Từ đó suy ra điều kiện của  $m$ .

Riêng hàm nhất biến:

- Hàm số  $f$  đồng biến trên  $D \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D$ .
- Hàm số  $f$  nghịch biến trên  $D \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in D$ .

**Chú ý:**

1)  $y' = 0$  chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm.

2) Nếu  $y' = ax^2 + bx + c$  thì:

$$\bullet y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c \geq 0 \\ a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \quad \bullet y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c \leq 0 \\ a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

3) Định lý về dấu của tam thức bậc hai  $g(x) = ax^2 + bx + c$ :

- Nếu  $\Delta < 0$  thì  $g(x)$  luôn cùng dấu với  $a$ .
- Nếu  $\Delta = 0$  thì  $g(x)$  luôn cùng dấu với  $a$  (trừ  $x = -\frac{b}{2a}$ )
- Nếu  $\Delta > 0$  thì  $g(x)$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  và trong khoảng hai nghiệm thì  $g(x)$  khác dấu với  $a$ , ngoài khoảng hai nghiệm thì  $g(x)$  cùng dấu với  $a$ .

4) So sánh các nghiệm  $x_1, x_2$  của tam thức bậc hai  $g(x) = ax^2 + bx + c$  với số 0:

$$\bullet x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \quad \bullet 0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \quad \bullet x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$$

5) So sánh các nghiệm  $x_1, x_2$  của tam thức bậc hai  $g(x) = ax^2 + bx + c$  với số  $\alpha$ :

$$\bullet x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow a.g(\alpha) < 0 \quad \alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.g(\alpha) > 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} > \alpha \end{cases} \quad x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.g(\alpha) > 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} < \alpha \end{cases}$$

**Ví dụ 9.** Tìm  $m$  để hàm số  $y = \frac{(m-1)x-2m}{x-m}$  đồng biến trên từng khoảng xác định.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 10.** Tìm  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx-2m+2}{x-m+1}$  nghịch biến trên từng khoảng xác định

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 11.** Chứng minh rằng hàm số  $y = 2 - m - \frac{m^2+1}{x+2m}$  luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 12.** Tìm  $m$  để hàm số  $y = x^3 - mx^2 + (m^2 - 3m)x + m^3 - 2$  luôn đồng biến.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 14.** Tìm  $m$  để hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 - (m-2)x^2 + (m-2)x + m$  luôn nghịch biến

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**VẤN ĐỀ 3:** Tìm điều kiện để hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng  $d$

• Tính  $y'$ .

• Tìm điều kiện để hàm số có khoảng đồng biến và nghịch biến:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \quad (1)$$

• Biến đổi  $|x_1 - x_2| = d$  thành  $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = d^2$  (2)

• Sử dụng định lý Viet đưa (2) thành phương trình theo  $m$ . Giải phương trình, so với điều kiện (1) để chọn nghiệm. Giải phương trình, so với điều kiện (1) để chọn nghiệm.

**Ví dụ 15.** Tìm  $m$  để hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 4$  đồng biến trên một khoảng có độ dài bằng 4.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**VẤN ĐỀ 4: Tìm điều kiện để hàm số đồng biến hoặc nghịch biến  
trên khoảng xác cho trước**

**Dạng 1. Hàm nhất biến**  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

\* Đồng biến trên  $K \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in K \Leftrightarrow \begin{cases} a.d - c.b > 0 \\ -\frac{d}{c} \notin K \end{cases}$

\* Nghịch biến trên  $K \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in K \Leftrightarrow \begin{cases} a.d - c.b < 0 \\ -\frac{d}{c} \notin K \end{cases}$

**Dạng 2. Các hàm số còn lại**

**Bước 1.**

\* Đồng biến trên  $K \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in K (*)$ ;

\* Nghịch biến trên  $K \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in K (**)$ .

**Bước 2.** Độc lập tham số  $m$  (trong  $(*)$ ,  $(**)$ ), đặt vế còn lại là  $f(x)$ , ta được

$$\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in K; \\ f(x) \leq m, \forall x \in K. \end{cases}$$

**Bước 3.** Khảo sát tính đơn điệu của hàm số  $y = f(x)$  trên  $K$ .

**Bước 4.** Dựa vào bảng biến thiên kết luận

+ Khi  $m \geq f(x), \forall x \in K \Rightarrow m \geq \max_K f(x)$ ;

+ Khi  $m \leq f(x), \forall x \in K \Rightarrow m \leq \min_K f(x)$ .

**Chú ý:** Một số bài toán không cô lập được tham số thì ta dựa vào bảng biến thiên và so sánh nghiệm để tìm lời giải.

**Ví dụ 16.** Tìm  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx+1}{x+m}$  đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**Bài 4. (\*)** Tìm  $m$  để hàm số:

a)  $y = \frac{x^3}{3} + (m+1)x^2 - (m+1)x + 1$  đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

b)  $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

c)  $y = \frac{mx+4}{x+m}$  ( $m \neq \pm 2$ ) đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

## B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** Hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + (m-2)x + 1$  luôn đồng biến khi:

- A.  $m \geq 5$ .                      B.  $m \leq 5$ .                      C.  $m \leq \frac{12}{5}$ .                      D.  $m > \frac{12}{5}$ .

**Câu 2:** Hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - (3m+2)x + 1$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  khi  $m$  bằng

- A.  $\begin{cases} m > -1 \\ m < -2 \end{cases}$ .                      B.  $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -2 \end{cases}$ .                      C.  $-2 \leq m \leq -1$ .                      D.  $-2 < m < -1$ .

**Câu 3:** Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ . Tìm tất cả giá trị  $m$  để hàm số luôn đồng biến trên tập xác định.

- A.  $m > 3$ .                      B.  $m < 3$ .                      C.  $m \geq 3$ .                      D.  $m \leq 3$ .

**Câu 4:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + mx$  đồng biến trên  $(-\infty; +\infty)$ ?

- A.  $m \in (-\infty; +\infty)$ .                      B.  $m \leq 0$ .                      C.  $m \geq 0$ .                      D.  $m = 0$ .

**Câu 5:** Giá trị của  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + 4x + 5$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  là:

- A.  $-3 \leq m \leq 1$ .                      B.  $-3 < m < 1$ .                      C.  $-2 \leq m \leq 2$ .                      D.  $-2 < m < 2$ .

**Câu 6:** Hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m+1)x + 1$  đồng biến trên tập xác định của nó khi

- A.  $m > -1$ .                      B.  $-1 \leq m \leq 0$ .                      C.  $m < 0$ .                      D.  $-1 < m < 0$ .

**Câu 7:** Điều kiện của  $m$  để hàm số  $y = (m^2 - 1)\frac{x^3}{3} + (m+1)x^2 + 3x + 5$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  là

- A.  $m \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ .                      B.  $m \in (-\infty; -1) \cup [2; +\infty)$ .  
C.  $m \in (-1; 2]$ .                      D.  $m \in [-1; 2]$ .

**Câu 8:** Tìm  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$  đồng biến trên miền  $(0; +\infty)$

- A.  $m \leq 0$                       B.  $m \geq 0$                       C.  $m \geq 12$                       D.  $m \leq 12$

**Câu 9:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx+3}{3x+m}$  luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó

- A.  $-3 < m < 3$ .                      B.  $m < -3$ .                      C.  $-3 < m < 0$ .                      D.  $m > 3$ .

**Câu 10: (Đề 105 – 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x+1}{x+3m}$  nghịch biến trên khoảng  $(6; +\infty)$

A. 3                                      B. 0                                      C. Vô số                                      D. 6

**Câu 11. (Câu 35. MĐ 101 năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x+2}{x+5m}$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -10)$ ?

A. 2.                                      B. Vô số.                                      C. 1.                                      D. 3.

### VẤN ĐỀ 5: Ứng dụng tính đơn điệu để chứng minh bất đẳng thức

Để chứng minh bất đẳng thức ta thực hiện các bước sau:

- Chuyển bất đẳng thức về dạng  $f(x) > 0$  (hoặc  $<, \geq, \leq$ ). Xét hàm số  $y = f(x)$  trên tập xác định do đề bài chỉ định.
- Xét dấu  $f'(x)$ . Suy ra hàm số đồng biến hay nghịch biến.
- Dựa vào định nghĩa sự đồng biến, nghịch biến để kết luận.

**Chú ý:**

1) Trong trường hợp ta chưa xét được dấu của  $f'(x)$  thì ta đặt  $h(x) = f'(x)$  và quay lại tiếp tục xét dấu  $h'(x)$  ... cho đến khi nào xét dấu được thì thôi.

2) Nếu bất đẳng thức có hai biến thì ta đưa bất đẳng thức về dạng:  $f(a) < f(b)$ .

Xét tính đơn điệu của hàm số  $f(x)$  trong khoảng  $(a; b)$ .

**Ví dụ 18.** Chứng minh bất đẳng thức sau:  $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ , với  $x > 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### BÀI TẬP

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a)  $\frac{2}{3} \sin x + \frac{1}{3} \tan x > x$ , với  $0 < x < \frac{\pi}{2}$

b)  $x < \tan x$ , với  $0 < x < \frac{\pi}{2}$

## II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

### I. Khái niệm cực trị của hàm số

Giả sử hàm số  $f$  xác định trên tập  $D$  ( $D \subset \mathbb{R}$ ) và  $x_0 \in D$ .

a)  $x_0$  là **điểm cực đại** của  $f$  nếu tồn tại khoảng  $(a; b) \subset D$  và  $x_0 \in (a; b)$  sao cho

$$f(x) < f(x_0), \text{ với } \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}.$$

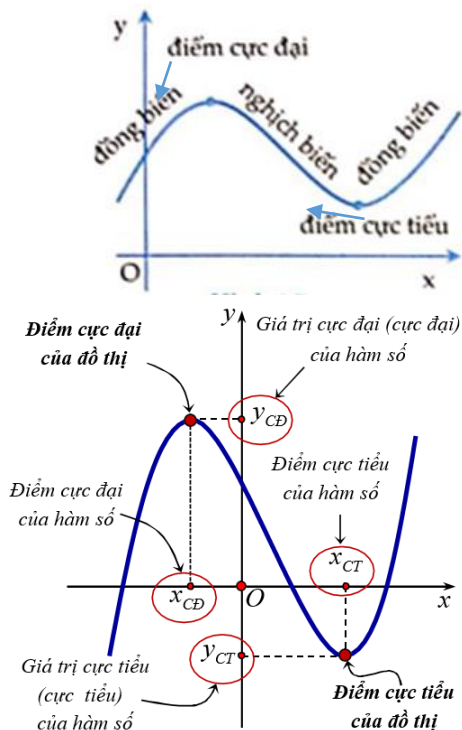
Khi đó  $f(x_0)$  được gọi là **giá trị cực đại** (cực đại) của  $f$ .

b)  $x_0$  là **điểm cực tiểu** của  $f$  nếu tồn tại khoảng  $(a; b) \subset D$  và  $x_0 \in (a; b)$  sao cho

$$f(x) > f(x_0), \text{ với } \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó  $f(x_0)$  được gọi là **giá trị cực tiểu** (cực tiểu) của  $f$ .

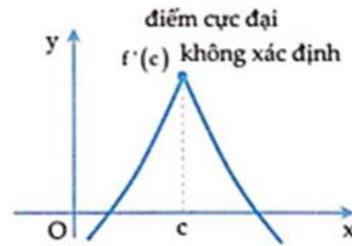
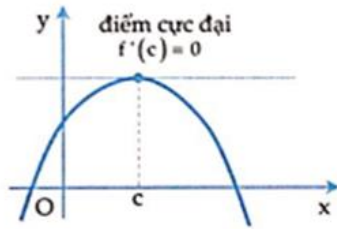
c) Nếu  $x_0$  là **điểm cực trị** của  $f$  thì **điểm**  $(x_0; f(x_0))$  được gọi là **điểm cực trị của đồ thị**  $h_s f$ .



### II. Điều kiện cần để hàm số có cực trị

Nếu hàm số  $f$  có đạo hàm tại  $x_0$  và đạt cực trị tại điểm đó thì  $f'(x_0) = 0$ .

**Chú ý:** Hàm số  $f$  chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

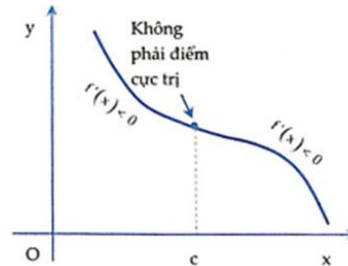
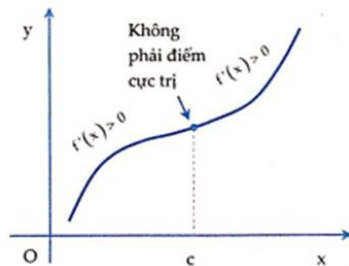
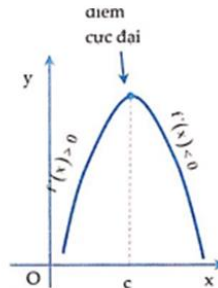
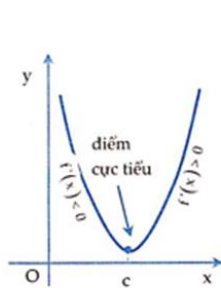


### III. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

**1. Định lí 1:** Giả sử hàm số  $f$  liên tục trên khoảng  $(a; b)$  chứa điểm  $x_0$  và có đạo hàm trên  $(a; b) \setminus \{x_0\}$

a) Nếu  $f'(x)$  đổi dấu từ **âm** sang **dương** khi  $x$  đi qua  $x_0$  thì  $f$  đạt **cực tiểu** tại  $x_0$ .

b) Nếu  $f'(x)$  đổi dấu từ **dương** sang **âm** khi  $x$  đi qua  $x_0$  thì  $f$  đạt **cực đại** tại  $x_0$ .



**2. Định lí 2:** Giả sử hàm số  $f$  có đạo hàm trên khoảng  $(a; b)$  chứa điểm  $x_0$ ,  $f'(x_0) = 0$  và có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm  $x_0$ .

a) Nếu  $f''(x_0) < 0$  thì  $f$  đạt cực đại tại  $x_0$ . b) Nếu  $f''(x_0) > 0$  thì  $f$  đạt cực tiểu tại  $x_0$ .

### VẤN ĐỀ 1: Tìm cực trị của hàm số

**Quy tắc 1:** Dùng định lí 1.

- Tìm  $f'(x)$ .
- Tìm các điểm  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.
- Xét dấu  $f'(x)$ . Nếu  $f'(x)$  đổi dấu khi  $x$  đi qua  $x_i$  thì hàm số đạt cực trị tại  $x_i$ .

**Quy tắc 2:** Dùng định lí 2.

- Tính  $f''(x)$ .

• Giải phương trình  $f'(x) = 0$  tìm các nghiệm  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

• Tính  $f''(x)$  và  $f''(x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Nếu  $f''(x_i) < 0$  thì hàm số đạt cực đại tại  $x_i$ .

Nếu  $f''(x_i) > 0$  thì hàm số đạt cực tiểu tại  $x_i$ .

### CÁC VÍ DỤ

**Ví dụ 18.** Tìm cực trị của hàm số  $y = -x^3 + 2x^2 - x + 3$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 19.** Tìm điểm cực trị của hàm số  $y = x^4 - 4x^2 + 1$  bằng 2 cách (dấu hiệu 1 và dấu hiệu 2).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 20.** Tìm  $m$  để hàm số:  $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + 2$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$ , bằng 2 cách (dấu hiệu 1 và dấu hiệu 2).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**VẤN ĐỀ 2: Tìm điều kiện để hàm số có cực trị**

1. Nếu hàm số  $y = f(x)$  đạt cực trị tại điểm  $x_0$  thì  $f'(x_0) = 0$  hoặc tại  $x_0$  không có đạo hàm.

2. Để hàm số  $y = f(x)$  đạt cực trị tại điểm  $x_0$  thì  $f'(x)$  đổi dấu khi  $x$  đi qua  $x_0$ .

**Chú ý:**

• Hàm số bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có cực trị  $\Leftrightarrow$  Phương trình  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt.

Khi đó nếu  $x_0$  là điểm cực trị thì ta có thể tính giá trị cực trị  $y(x_0)$  bằng hai cách:

$$+ y(x_0) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$$

$$+ y(x_0) = Ax_0 + B, \text{ trong đó } Ax + B \text{ là phần dư trong phép chia } y \text{ cho } y'.$$

$$(f(x) = Q(x) \cdot f'(x) + Ax + B.)$$

Khi đó  $y = Ax + B$  là đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số

• Khi sử dụng điều kiện cần để xét hàm số có cực trị cần phải kiểm tra lại để loại bỏ nghiệm ngoại lai.

• Khi giải các bài tập loại này thường ta còn sử dụng các kiến thức khác nữa, nhất là định lý Vi-ét.

• Hàm bậc bốn trùng phương dạng  $y = ax^4 + bx^2 + c$  ( $a \neq 0$ )

$$\text{Ta có } y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

Số điểm cực trị phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình  $ax^2 + b = 0$ .

Nếu  $\frac{b}{2a} < 0$  (tức  $a, b$  trái dấu) thì hàm số có ba điểm cực trị là  $x = 0; x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$ .

Nếu  $\frac{b}{2a} \geq 0$  (tức  $a, b$  cùng dấu hoặc  $b = 0$ ) thì hàm số có duy nhất một điểm cực trị là  $x = 0$

**Ví dụ 21.** Tìm  $m$  để hàm số:  $y = x^3 - 2mx^2 + mx - 1$  có cực trị.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 22.** Tìm  $m$  để hàm số:  $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + (m+1)x - 1$  có cực đại và cực tiểu.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 23.** Tìm  $m$  để hàm số:  $y = x^3 - mx^2 + 2mx - 1$  không có cực trị

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 24.** Tìm  $m$  để hàm số:  $y = x^4 - (3m-1)x^2 + m - 2$  có 3 cực trị.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 25.** Tìm  $m$  để hàm số:  $y = x^4 - (m-2)x^2 + m + 4$  có 1 cực trị.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**VẤN ĐỀ 3: Công thức tính nhanh cực trị hàm trùng phương**

Gọi  $A$  thuộc  $Oy$ ,  $B, C$  là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số, ta có các trường hợp sau:

+ Tam giác  $ABC$  vuông cân, khi  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{b^3}{a} = -8}$

+ Tam giác  $ABC$  đều, khi  $AB = BC \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} = -\frac{2b}{a} \Leftrightarrow \boxed{\frac{b^3}{a} = -24}$

+ Tam giác  $ABC$  có diện tích  $S$ , gọi  $H$  là trung điểm của  $BC$ ,

Ta có  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC \Rightarrow S^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{b^2}{4a}\right)^2 \cdot \left(2\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{S^2 = \frac{-b^5}{32a^3}}$

**Ví dụ 26.** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$  có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**VẤN ĐỀ 4: Phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị**

**Dạng 1:** Tìm phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của hàm bậc 3 bằng MTBT.

Ta tìm phần dư trong phép chia  $y$  cho  $y'$  một cách tổng quát như sau:

Ta có  $y' = 3ax^2 + 2bx + c; y'' = 6ax + 2b$ .

Xét phép chia  $y$  cho  $y'$  thì ta được:  $y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{b}{9a}\right) + g(x)$  (\*), ở đây  $g(x)$  là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba.

Tiếp tục ta có (\*)  $\Leftrightarrow y = y' \cdot \frac{3ax+b}{9a} + g(x) \Leftrightarrow y = y' \cdot \frac{6ax+2b}{18a} + g(x)$

$\Leftrightarrow y = y' \cdot \frac{y''}{18a} + g(x) \Rightarrow \boxed{g(x) = y - \frac{y' \cdot y''}{18a}}$

Nhập công thức trên vào máy tính, gán  $x=i$ , nếu có chứa tham số ta gán cho tham số bằng 100, suy ra phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị.

+ Ngoài ra, sau khi thực hiện phép chia tổng quát thì ta rút ra được công thức phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba theo  $a, b, c, d$  như sau:

$$y = \left( \frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a} \right) x + d - \frac{bc}{9a}$$

**Dạng 2:** Hàm số  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$  có phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị là

$$y = \frac{2ax + b}{d}$$

**Ví dụ 27:** Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số :

$$y = x^3 - 2x^2 - x + 1$$

.....

.....

.....

.....

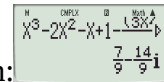
.....

HDBM: Chuyển máy tính sang chế độ tính toán với số phức bằng cách nhập: MODE 2:CMPLX

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số xác định bởi:

$$g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1 - (3x^2 - 4x - 1) \cdot \frac{6x - 4}{18}$$

Ấn CALC, gán  $x$  bằng  $i$  (ở máy tính  $i$  là nút ENG) khi đó máy hiện:



$$\frac{7}{9} - \frac{14}{9}i$$

Vậy phương trình đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là

$$y = \frac{7}{9} - \frac{14}{9}x \Leftrightarrow 14x + 9y - 7 = 0.$$

Ngoài ra, ta thế các hệ số  $a, b, c, d$  trực tiếp vào công thức  $y = \left( \frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a} \right) x + d - \frac{bc}{9a}$ , ta được

phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị:  $y = -\frac{14}{9}x + \frac{7}{9} \Leftrightarrow 14x + 9y - 7 = 0.$

**Ví dụ 28:** Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số :  $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 2}$

.....

.....

.....

.....

.....

**A. BÀI TẬP TỰ LUẬN****Bài 1.** Tìm cực trị của các hàm số sau:

a)  $y = 3x^2 - 2x^3$

b)  $y = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

c)  $y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 15x$

d)  $y = \frac{x^4}{2} - x^2 + 3$

e)  $y = x^4 - 4x^2 + 5$

f)  $y = -\frac{x^4}{2} + x^2 + \frac{3}{2}$

g)  $y = \frac{-x^2 + 3x + 6}{x + 2}$

h)  $y = \frac{3x^2 + 4x + 5}{x + 1}$

i)  $y = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 3}$

**Bài 2.** Tìm cực trị của các hàm số sau:

a)  $y = (x - 2)^3(x + 1)^4$

b)  $y = \frac{4x^2 + 2x - 1}{2x^2 + x - 3}$

c)  $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$

d)  $y = x\sqrt{x^2 - 4}$

e)  $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

f)  $y = x + \sqrt{2x - x^2}$

**Bài 3:** Dùng dấu hiệu 2, tìm cực trị các hàm số:

a)  $y = x^4 - 2x^2 + 1$

b)  $y = \sin 2x - x$

c)  $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$

d)  $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$

**Bài 4:** Tìm m để hàm số:

a)  $y = (m + 2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$  có cực đại, cực tiểu.

b)  $y = x^3 - 3(m - 1)x^2 + (2m^2 - 3m + 2)x - m(m - 1)$  có cực đại, cực tiểu.

c)  $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 - 1)x + 2$  đạt cực đại tại  $x = 2$ .

d)  $y = -mx^4 + 2(m - 2)x^2 + m - 5$  có một cực đại  $x = \frac{1}{2}$ .

e)  $y = \frac{x^2 - 2mx + 2}{x - m}$  đạt cực tiểu khi  $x = 2$ .

f)  $y = \frac{x^2 - (m + 1)x - m^2 + 4m - 2}{x - 1}$  có cực đại, cực tiểu.

g)  $y = \frac{x^2 - x + m}{x - 1}$  có một giá trị cực đại bằng 0.

**Bài 5: (\*)** Tìm m để hàm số :

a)  $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$  đạt cực trị tại hai điểm  $x_1, x_2$  sao cho:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

b)  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + mx - 1$  đạt cực trị tại hai điểm  $x_1, x_2$  sao cho:  $|x_1 - x_2| \geq 8$ .

c)  $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$  đạt cực trị tại hai điểm  $x_1, x_2$  sao cho:  $x_1 + 2x_2 = 1$

**Bài 6:** Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số :

a)  $y = x^3 - 2x^2 - x + 1$

b)  $y = 3x^2 - 2x^3$

c)  $y = \frac{2x^2 - x + 1}{x + 3}$

d)  $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

**Bài 7: (\*)** Khi hàm số có cực đại, cực tiểu, viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số:

a)  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$

b)  $y = x^3 - 3(m-1)x^2 + (2m^2 - 3m + 2)x - m(m-1)$

**Bài 8: (\*)** Tìm m để hàm số:

a)  $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$  có đường thẳng đi qua hai điểm cực trị song song với đường thẳng  $y = -4x + 1$ .

b)  $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$  có các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị nằm trên đường thẳng  $y = -4x$ .

**Bài 9: (\*)** Tìm m để đồ thị hàm số

a/  $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$  có 3 cực trị và 3 điểm cực trị của hàm số tạo thành tam giác vuông cân.

b/  $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$  có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

c/  $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$  có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 4.

## B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** Cho hàm số  $(C): y = f(x)$  xác định trên tập  $K$  và  $x_0 \in K$ . Hàm số  $(C)$  đạt cực tại  $x_0$  nếu

A.  $f'(x_0) = 0$ .

B.  $f''(x_0) < 0$ .

C. tồn tại khoảng  $x_0 \in (a; b) \subset K$  sao cho  $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ .

D. tồn tại khoảng  $x_0 \in (a; b) \subset K$  sao cho  $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ .

**Câu 2:** Giả sử hàm số  $(C): y = f(x)$  xác định trên tập  $K$  và đạt cực tiểu tại điểm  $x_0 \in K$ . Khi đó:

A. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm  $x_0$ .

B. Nếu hàm số có đạo hàm tại  $x_0$  thì  $f'(x_0) = 0$ .

C.  $f''(x_0) > 0$ .

D. Hàm số luôn có đạo hàm bằng 0 tại điểm  $x_0$ .

**Câu 3:** Hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$  đạt cực trị tại  $x_1$  và  $x_2$  thì tích các giá trị cực trị bằng

A. 25.

B. -82.

C. -207.

D. -302.

**Câu 4:** Hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 1$  đạt cực trị tại các điểm nào sau đây?

A.  $x = \pm 2$ .

B.  $x = \pm 1$ .

C.  $x = 0; x = 2$ .

D.  $x = 0; x = 1$ .

**Câu 5:** Lập phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x$$

A.  $y = -\frac{5}{6}x + \frac{1}{2}$ .

B.  $y = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}$ .

C.  $y = -\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}$ .

D.  $y = \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}$ .

**Câu 6:** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 7x + 3$  đạt cực trị tại  $x_1, x_2$ . Tính  $T = x_1^3 + x_2^3$

A.  $T = -50$ .

B.  $T = -30$ .

C.  $T = 29$ .

D.  $T = 49$ .

**Câu 7:** Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$$
 là

A.  $y = 9x + 1$ .

B.  $y = -9x + 1$

C.  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$ .

D.  $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$ .

**Câu 8:** Biết hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$  có hai điểm cực trị  $x_1, x_2$ . Tính tổng  $x_1^2 + x_2^2$ .

A.  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ .

B.  $x_1^2 + x_2^2 = 9$ .

C.  $x_1^2 + x_2^2 = 2$ .

D.  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .

**Câu 9:** Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = -x^4 + 2x^2 + 3$  là

- A.  $(-1; 4)$ .      B.  $(1; 4)$ .      C.  $(0; 3)$ .      D.  $(-2; 2)$ .

**Câu 10:** Hàm số nào sau đây có 2 cực đại?

- A.  $y = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 - 3$ .      B.  $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ .  
C.  $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 3$ .      D.  $y = 2x^4 + 2x^2 - 3$ .

**Câu 11:** Hàm số nào trong các hàm số sau đây không có cực trị?

- A.  $y = |x|$ .      B.  $y = x^3 - x^2 + 3x + 5$ .  
C.  $y = x^4 + x^2 - 2$ .      D.  $y = 3x^2 + 2x - 1$ .

**Câu 12:** Trong các hàm số sau, hàm số nào chỉ có cực đại mà không có cực tiểu?

- A.  $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ .      B.  $y = \frac{2x-1}{x}$ .  
C.  $y = -x^4 - x^2 + 5$ .      D.  $y = \frac{4x^2 + x - 5}{x+2}$ .

**Câu 13:** Hàm số  $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x+1}$  có hai điểm cực trị là  $x_1, x_2$ , khi đó tích  $x_1 \cdot x_2$  bằng

- A. -5.      B. 5.      C. -2.      D. 2.

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau:

|    |           |   |   |   |           |   |   |   |           |
|----|-----------|---|---|---|-----------|---|---|---|-----------|
| x  | $-\infty$ | 2 | 5 | 8 | $+\infty$ |   |   |   |           |
| y' | -         |   | + | 0 | -         |   | + |   |           |
| y  | $+\infty$ |   | 0 | ↗ | 2         | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 và giá trị lớn nhất bằng 2.  
B. Giá trị cực đại của hàm số bằng 5.  
C. Hàm số có đúng một điểm cực trị.  
D. Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 2$  và  $x = 8$ .

**Câu 14: (Đề 108 – 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên sau

|      |           |   |   |           |   |   |
|------|-----------|---|---|-----------|---|---|
| $x$  | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |   |   |
| $y'$ |           | - | 0 | +         | 0 | - |
| $y$  | $+\infty$ |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 1.      B. 2.      C. 0.      D. 5.

**Câu 15. (Minh họa 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3.                      B. 2.                      C. 5.                      D. 1.

**Câu 16. (Đề 108 – 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x-2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0.                      B. 3.                      C. 1.                      D. 2.

**Câu 17:** Hàm số  $y = x - \sin 2x$  đạt cực đại tại các điểm nào cho dưới đây?

- A.  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .                      B.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
C.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .                      D.  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 18.** Với giá trị nào của  $m$  thì hàm số  $y = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + (1-2m)x + 5m^3 - 3$  có 2 cực trị

- A.  $m < \frac{11}{24}$                       B.  $m \leq \frac{11}{24}$ .                      C.  $m > \frac{11}{24}$ .                      D.  $m \geq \frac{11}{24}$ .

**Câu 19.** Tìm giá trị  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{3}mx$  có hai cực trị  $x_1, x_2$  thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 0.$$

- A.  $m = 3$ .                      B.  $m = 2$ .                      C.  $m = \frac{4}{3}$ .                      D.  $m = -3$ .

**Câu 20.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$  ( $m$  là tham số). Giá trị của tham số  $m$  để hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 2$  là:

- A.  $m = 1$ .                      B.  $m = 0$ .                      C.  $m = 2$ .                      D.  $m = 3$ .

**Câu 21.** Hàm số  $f(x) = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 2$  đạt cực tiểu tại  $x = 2$  khi

- A.  $m = 2$ .                      B. 5.                      C.  $m = 3$ .                      D.  $m = 1$ .

**Câu 22.** Hàm số  $(C): y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$  luôn có ít nhất một điểm cực tiểu nếu

- A.  $a < 0$ .                      B.  $a < 0, b \leq 0$ .                      C.  $a > 0$ .                      D.  $a < 0, c < 0$

**Câu 23.** Hàm số  $y = 2x^4 - (m^2 - 4)x^2 + m$  có 3 cực trị khi:

- A.  $m > 2; m < -2$ .                      B.  $-2 < m < 2$ .                      C.  $m < 0$ .                      D.  $m > 1$ .

**Câu 24. (Minh họa 2017)** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  sao cho đồ thị của hàm số

$y = x^4 + 2mx^2 + 1$  có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

- A.  $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$                       B.  $m = -1$                       C.  $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$                       D.  $m = 1$

**Câu 25.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  sao cho đồ thị của hàm số  $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$  có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

A.  $m = 2 + \sqrt[3]{3}$

B.  $m = -1$

C.  $m = 2 - \sqrt[3]{3}$

D.  $m = 1$

**Câu 26. (Câu 33 đề 101-năm 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu của  $f'(x)$  như sau:

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----|-----------|
| $f'(x)$ | +         | 0    | -   | 0   | +   | -         |

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

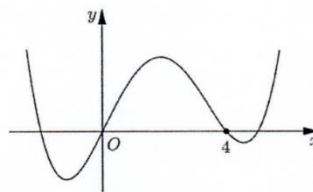
A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Câu 27. (Câu 46 minh họa 2020)** Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$  là.



A. 5.

B. 3.

C. 7.

D. 11.

**Câu 28. (Câu 36 Mã 101 2018).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$ ?

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. Vô số.

**Câu 29. (Câu 50 Mã 101 2021).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x-7)(x^2-9), \forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(|x^3 + 5x| + m)$  có ít nhất 3 điểm cực trị?

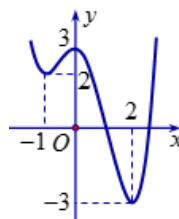
A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

**Câu 30.** Hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = |f(x+1) + m|$  có 5 điểm cực trị.



A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. Vô số.

### III. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

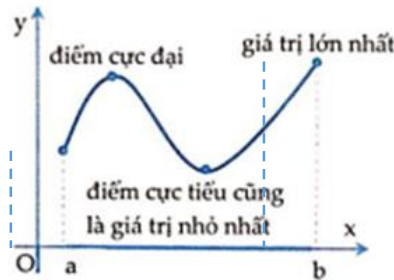
#### 1. Định nghĩa:

Giả sử hàm số  $f$  xác định trên miền  $D$  ( $D \subset \mathbb{R}$ ).

$$a) M = \max_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$$

$$b) m = \min_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$$

**Nhận xét:** Giá trị cực đại (cực tiểu) của hàm số được xét trên vùng lân cận của điểm cực trị, vì vậy thường được gọi là "cực trị địa phương", còn giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số được xét trên toàn miền. Ví dụ cụ thể khi thể hiện giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) và điểm cực đại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số được thể hiện ở hình sau:



Ta thấy giá trị cực đại và giá trị lớn nhất của hàm số khác nhau. Điểm cực đại nằm giữa khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến, còn giá trị lớn nhất là tung độ của điểm "cao nhất" của đồ thị hàm số trên  $[a; b]$ . Chú ý rằng, ở hình trên, giá trị lớn nhất của hàm số có thể nằm ở điểm đầu mút của  $[a; b]$ , và giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất có thể trùng với giá trị cực trị của hàm số. Ta thấy đây là đồ thị của một hàm liên tục có cả giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, nên ta có định lý sau.

**Định lý:** Mọi hàm số liên tục trên  $[a; b]$  có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên  $[a; b]$ .

#### 2. Tính chất:

$$a) \text{ Nếu hàm số } f \text{ đồng biến trên } [a; b] \text{ thì } \max_{[a; b]} f(x) = f(b), \min_{[a; b]} f(x) = f(a).$$

$$b) \text{ Nếu hàm số } f \text{ nghịch biến trên } [a; b] \text{ thì } \max_{[a; b]} f(x) = f(a), \min_{[a; b]} f(x) = f(b).$$

## Phương pháp tìm GTLN, GTNN của hàm số

**Cách 1:** Thường dùng khi tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng.

- Tính  $f'(x)$ .
- Xét dấu  $f'(x)$  và lập bảng biến thiên.
- Dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

**Cách 2:** Thường dùng khi tìm GTLN, GTNN của hàm số liên tục trên một đoạn  $[a; b]$ .

- Tính  $f'(x)$ .
- Giải phương trình  $f'(x) = 0$  tìm được các nghiệm  $x_1, x_2, \dots, x_n$  trên  $[a; b]$  (nếu có).
- Tính  $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ .
- So sánh các giá trị vừa tính và kết luận.

$$M = \max_{[a;b]} f(x) = \max \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

$$m = \min_{[a;b]} f(x) = \min \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

Chú ý: Nếu bài toán phải đặt ẩn phụ thì phải có điều kiện cho ẩn phụ đó

**Ví dụ 28.** Tìm GTLN, GTNN của hàm số  $y = x^4 + 2x^2 - 2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 29.** Tìm GTLN, GTNN của hàm số  $y = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 30.** Tìm GTLN, GTNN của hàm số  $y = 3x - x^3$ , trên  $[-2; 3]$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 31.** Tìm GTLN, GTNN của hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$  trên  $[0; 4]$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 32.** Tìm Giá trị của tham số thực  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{mx+1}{x-m}$  trên đoạn  $[1; 2]$  bằng  $-2$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 35.

a) Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi 16 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

b) Trong các hình chữ nhật có diện tích 48 m<sup>2</sup>, hãy tìm hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất.

### A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau:

a)  $y = x^2 + 4x + 3$

b)  $y = 4x^3 - 3x^4$

c)  $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$

d)  $y = \frac{x-1}{x^2-2x+2}$

**Bài 2.** Tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau:

a)  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$  trên  $[-1; 5]$

b)  $y = x^4 - 2x^2 + 3$  trên  $[-3; 2]$

c)  $y = 2 \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x$  trên  $[0; \pi]$

d)  $y = \frac{3x-1}{x-3}$  trên  $[0; 2]$

e)  $y = \frac{4x^2 + 7x + 7}{x + 2}$  trên  $[0; 2]$

f)  $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$  trên  $[0; 1]$

g)  $y = \sqrt{100 - x^2}$  trên  $[-6; 8]$

h)  $y = \sqrt{2 + x} + \sqrt{4 - x}$

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục và luôn nghịch biến trên  $[a; b]$ . Hỏi hàm số  $f(x)$  đạt giá trị lớn nhất tại điểm nào sau đây ?

A.  $x = a$ .

B.  $x = b$ .

C.  $x = \frac{a+b}{2}$ .

D.  $x = \frac{b-a}{2}$ .

**Câu 2.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = -x^3 + 12x + 2$  trên đoạn  $[1; 4]$  là

A. 13.

B. 2.

C. -14.

D. 18.

**Câu 3.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = x^3 - 3x + 3$  trên  $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$  bằng:

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

**Câu 4.** Gọi  $m$  là giá trị nhỏ nhất và  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$  trên đoạn

$$\left[-2; -\frac{1}{2}\right].$$

Tính giá trị của  $M - m$

A. -5.

B. 1.

C. 4.

D. 5.

**Câu 5.** Kí hiệu  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{x+3}{2x-1}$  trên đoạn  $[1; 4]$ . Tính giá trị biểu thức  $d = M - m$ .

A.  $d = 3$ .

B.  $d = 4$ .

C.  $d = 5$ .

D.  $d = 2$ .

**Câu 6.** Gọi  $M, n$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x) = \frac{x-2}{x+1}$  trên đoạn  $[0; 2]$ . Hãy tính tích  $M.n$ .

A. 2.

B. 0.

C. -1.

D. 1.

**Câu 7.** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = -3 + \sqrt{4 - x^2}$  lần lượt là

A. -3 và 0.

B. -3 và -1.

C. 0 và 2.

D. -2 và 2.

**Câu 8.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sqrt{6-x} - \sqrt{x+4}$  đạt tại  $x_0$ , tìm  $x_0$ ?

A.  $x_0 = -\sqrt{10}$ .

B.  $x_0 = -4$ .

C.  $x_0 = 6$ .

D.  $x_0 = \sqrt{10}$ .

**Câu 9.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$  là:

A. 4.

B. 0.

C. -2.

D. 2.

**Câu 10.** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = 2x - 4\sqrt{6-x}$  trên đoạn  $[-3; 6]$ . Tổng  $M + m$  có giá trị là:

A. 18.

B. -6.

C. -12.

D. -4.

**Câu 11.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$  trên đoạn  $[1;3]$

A.  $\max_{[1;3]} y = 2.$

B.  $\max_{[1;3]} y = \sqrt{2}.$

C.  $\max_{[1;3]} y = -\sqrt{2}.$

D.  $\max_{[1;3]} y = -2.$

**Câu 12.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 5\sin x - \cos 2x$  là:

A.  $-6.$

B.  $-7.$

C.  $-4.$

D.  $3.$

**Câu 13.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2\cos^2 x + 4\cos x$

A.  $\min_{\mathbb{R}} y = 5.$

B.  $\min_{\mathbb{R}} y = -2.$

C.  $\min_{\mathbb{R}} y = 7.$

D.  $\min_{\mathbb{R}} y = 8.$

**Câu 14.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \cos 2x + 4\cos x + 1.$

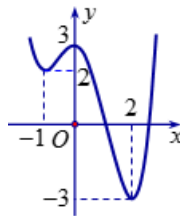
A.  $\min_{\mathbb{R}} y = 5.$

B.  $\max_{\mathbb{R}} y = 6.$

C.  $\min_{\mathbb{R}} y = 7.$

D.  $\min_{\mathbb{R}} y = 8.$

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $M$  và  $m$  là GTLN và GTNN của  $f(x)$  trên đoạn  $[-1;2]$ . Giá trị của  $M.m$  bằng ?



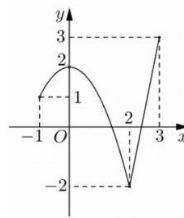
A. 1

B. 3

C. -9

D. 0

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1;3]$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên  $[-1;3]$ . Giá trị của  $M - m$  bằng



A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 5.

**Câu 17.** Giá trị của tham số thực  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{mx+1}{x-m}$  trên đoạn  $[1;2]$  bằng  $-2$  là:

A.  $m = -3.$

B.  $m = 3.$

C.  $m = 1.$

D. Không tồn tại.

**Câu 18.** Trên đoạn  $[2;4]$  hàm số  $y = \frac{mx+1}{x-m}$  đạt giá trị lớn nhất bằng 2. Khi đó :

A.  $m = \frac{7}{6}.$

B.  $m = 1.$

C.  $m = 2.$

D.  $m = \frac{3}{4}.$

**Câu 19:** Hình chữ nhật có chu vi không đổi là 8 m. Diện tích lớn nhất của hình chữ nhật đó là:

A.  $4m^2.$

B.  $8m^2$

C.  $16m^2.$

D.  $2m^2.$

## V. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ

### I. Định nghĩa:

- Đường thẳng  $x = x_0$  đgl **đường tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

- Đường thẳng  $y = y_0$  đgl **đường tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

### 2. Chú ý:

a) Nếu  $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  là hàm số phân thức hữu tỷ.

- Nếu  $Q(x) = 0$  có nghiệm  $x_0$  thì đồ thị **có thể** có tiệm cận đứng  $x = x_0$ .
- Nếu  $\text{bậc}(P(x)) \leq \text{bậc}(Q(x))$  thì đồ thị có tiệm cận ngang.

**Ví dụ 33.** Tìm các đường tiệm cận của hàm số  $y = \frac{2x+3}{2-x}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 34.** Tìm các đường tiệm cận của hàm số  $y = \frac{7x^2 + 4x + 5}{2 - 3x}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 35.** Tìm các đường tiệm cận của hàm số  $y = \frac{4x+2}{\sqrt{x^2-9}}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Tìm các tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

a)  $y = \frac{2x-5}{x-1}$

b)  $y = \frac{10x+3}{1-2x}$

c)  $y = \frac{x^2-4x+3}{x+1}$

d)  $y = \frac{(x-2)^2}{1-x}$

**Bài 2.** Tìm các tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

a)  $y = \frac{x}{x^2-4x+5}$

b)  $y = \frac{2+x}{9-x^2}$

c)  $y = \frac{x^2+4x+5}{x^2-1}$

d)  $y = \frac{2x^2+3x+3}{x^2+x+1}$

e)  $y = \frac{x^3+x+1}{x^2+1}$

f)  $y = \frac{x^4-x+4}{x^3-1}$

g)  $y = \sqrt{x^2-4x}$

h)  $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-5x+4}$

### B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** Trong các hàm số sau, đồ thị hàm số nào có đường tiệm cận ngang:

A.  $y = x^3 + 25x^2 + 8$     B.  $y = x^4 - 8x^2 + 99$     C.  $y = \frac{-3x-1}{x^2-2}$     D.  $y = \frac{2x^2-1}{x-2}$

**Câu 2:** Đường thẳng  $y = -8$  là tiệm cận ngang của đồ thị của hàm số nào ?

A.  $y = \frac{2x+7}{x^2-9}$     B.  $y = \frac{16x-25}{3-2x}$     C.  $y = \frac{2x^2-1}{16x-2}$     D.  $y = \frac{8x-25}{1-3x}$

**Câu 3:** Phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+3}{x-1}$  là:

A.  $y = 1, x = 2$

B.  $y = 2, x = 1$

C.  $y = \frac{1}{2}, x = 1$

D.  $y = 1, x = \frac{1}{2}$

**Câu 4:** Cho hàm số  $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6}}{x - 1}$  và  $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$ . Tổng số đường tiệm cận của hai đồ thị là

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

**Câu 5:** Cho hàm số  $y = \frac{3}{x+1}$  có đồ thị là (C). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. (C) có tiệm cận ngang là  $y = 3$ B. (C) có tiệm cận ngang là  $y = 0$ C. (C) có tiệm cận đứng là  $x = 1$ 

D. (C) chỉ có một tiệm cận

**Câu 6:** Đồ thị hàm số  $y = 1 + \frac{2x+3}{|x|+1}$  có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. không có

B. 1

C. 4

D. 2

**Câu 7:** Đường thẳng  $y = 2$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào dưới đây?

A.  $y = \frac{2}{x+1}$

B.  $y = \frac{1+x}{1-2x}$

C.  $y = \frac{2x-2}{x+2}$

D.  $y = \frac{-2x+3}{x-2}$

**Câu 8:** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}-x}$  là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|        |           |   |            |           |            |
|--------|-----------|---|------------|-----------|------------|
| $x$    | $-\infty$ |   | 1          |           | $+\infty$  |
| $f(x)$ |           | 2 | $\nearrow$ | $+\infty$ | 5          |
|        |           |   |            | 3         | $\nearrow$ |

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

**Câu 10:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $(-\infty; 5) \setminus \{-1\}$  có bảng biến thiên như hình dưới. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

|      |           |            |           |            |
|------|-----------|------------|-----------|------------|
| $x$  | $-\infty$ | -1         | 1         | 5          |
| $y'$ |           | +          | +         |            |
| $y$  | 2         | $\nearrow$ | $+\infty$ | 2          |
|      |           |            | $-\infty$ | $\searrow$ |

A. 2.

B. 1

C. 3

D. 4.

**Câu 11: (Đề 108-2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |     |     |     |      |     |           |
|------|-----------|-----|-----|-----|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |     | $0$ |     | $1$  |     | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$ |     | $-$ | $0$  | $+$ |           |
| $y$  | $0$       |     | $2$ |     | $-2$ |     | $+\infty$ |

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

- A. 1.                      B. 3.                      C. 4.                      D. 2.

**Câu 12:** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$  có tiệm cận ngang là đường thẳng  $y = 1$ .

- A.  $m = 2$ .                      B.  $m = \frac{5}{2}$ .                      C.  $m = 0$ .                      D.  $m = 1$ .

**Câu 13:** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-5x+4}$  là

- A. 2.                      B. 1.                      C. 3.                      D. 4.

**Câu 14:** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-5x+4}$  là

- A. 2.                      B. 1.                      C. 3.                      D. 4.

**Câu 15:** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}$  là

- A. 2.                      B. 1.                      C. 3.                      D. 4.

**Câu 16:** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2+m}{x-m}$  có đường tiệm cận đứng đi qua điểm  $M(2;1)$ .

- A.  $m = 2$ .                      B.  $m = \frac{5}{2}$ .                      C.  $m = 0$ .                      D.  $m = 1$ .

**Câu 17:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $(-\infty; 5) \setminus \{-1\}$  có bảng biến thiên như hình dưới.

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận ngang là?

|      |           |           |      |     |     |           |     |
|------|-----------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ |           | $-1$ |     | $1$ |           | $5$ |
| $y'$ |           | $+$       |      | $+$ |     |           |     |
| $y$  |           | $+\infty$ |      | $2$ |     | $-\infty$ |     |

- A.  $x = -1$                       B.  $x = 5$                       C.  $y = -1$                       D.  $y = 2$

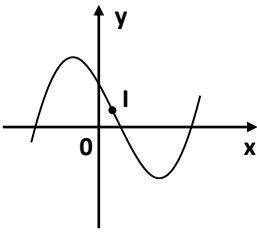
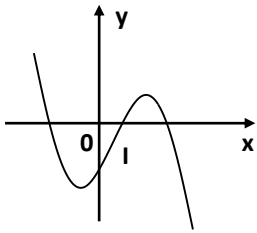
## VI. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

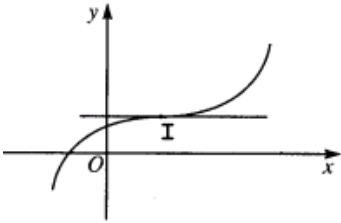
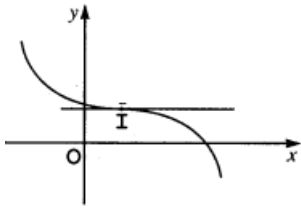
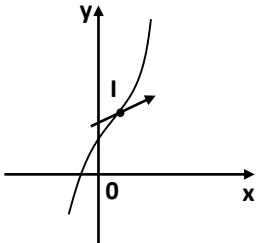
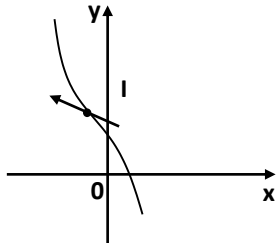
### 1. Các bước khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

- Tìm tập xác định của hàm số.
- Xét sự biến thiên của hàm số:
  - + Tính  $y'$ .
  - + Tìm các điểm tại đó đạo hàm  $y'$  bằng 0 hoặc không xác định.
  - + Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).
  - + Lập bảng biến thiên ghi rõ dấu của đạo hàm, chiều biến thiên, cực trị của hàm số.
- Vẽ đồ thị của hàm số:
  - + Vẽ các đường tiệm cận (nếu có) của đồ thị.
  - + Xác định một số điểm đặc biệt của đồ thị như giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (trong trường hợp đồ thị không cắt các trục toạ độ hoặc việc tìm toạ độ giao điểm phức tạp thì có thể bỏ qua). Có thể tìm thêm một số điểm thuộc đồ thị để có thể vẽ chính xác hơn.
  - + Nhận xét về đồ thị: Chỉ ra trục đối xứng, tâm đối xứng (nếu có) của đồ thị.

### 2. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ( $a \neq 0$ ):

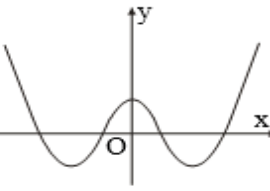
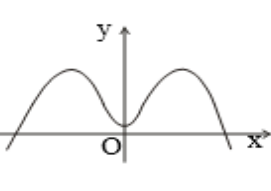
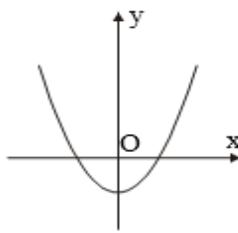
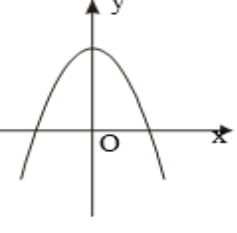
- Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .
- Cho  $y' = 0 \Leftrightarrow x_0 \Rightarrow I(x_0; f'(x_0))$ . Đồ thị nhận  $I$  (điểm uốn) làm tâm đối xứng.
- Các dạng đồ thị:

|                                                                             | $a > 0$                                                                             | $a < 0$                                                                               |
|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt<br>$\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac > 0$ |  |  |

|                                                                     |                                                                                   |                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $y' = 0$ có nghiệm kép<br>$\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac = 0$ |  |  |
| $y' = 0$ vô nghiệm<br>$\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac < 0$     |  |  |

### 3. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ( $a \neq 0$ ):

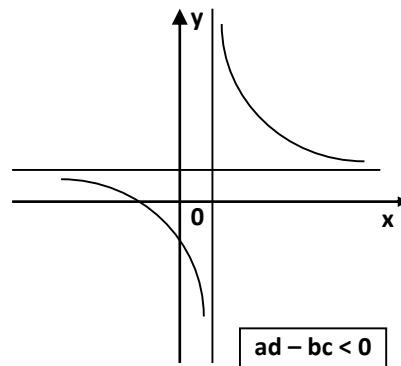
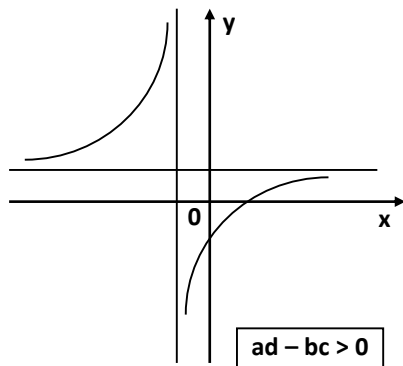
- Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .
- Đồ thị luôn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Các dạng đồ thị:

|                                               | $a > 0$                                                                             | $a < 0$                                                                              |
|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt<br>$(a.b < 0)$ |  |  |
| $y' = 0$ có 1 nghiệm<br>$(a.b \geq 0)$        |  |  |

### 4. Hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ( $c \neq 0, ad - bc \neq 0$ ):

- Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ .
- Đồ thị có một tiệm cận đứng là  $x = -\frac{d}{c}$  và một tiệm cận ngang là  $y = \frac{a}{c}$ . Giao điểm của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

- Các dạng đồ thị:



### 5. Cách vẽ đồ thị của hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối:

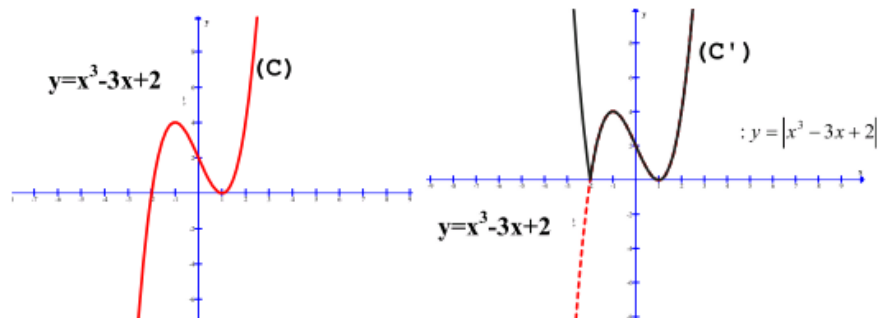
#### DẠNG 1 : Vẽ đồ thị hàm số: $y = |f(x)|$

Ta có,  $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) \leq 0 \end{cases}$ . Do đó đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  có thể suy ra được

từ đồ thị (C) của hàm số  $y = f(x)$  như sau:

- + Phần của (C) nằm trên trục hoành, ta giữ nguyên
- + Phần của (C) nằm dưới trục hoành, ta bỏ đi và thay vào đó là phần đối xứng của phần vừa bỏ qua trục hoành.

+ Ví dụ :

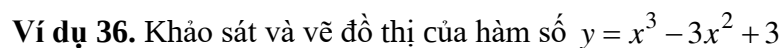


#### DẠNG 2 : Vẽ đồ thị hàm số: $y = f(|x|)$

Ta có  $y = f(|x|)$  là hàm chẵn. Do đó đồ thị của nó đối xứng qua trục tung

**Nhận xét:** Với  $x \geq 0$ , ta có  $f|x| = f(x)$ . Vậy đồ thị của hàm  $y = f(|x|)$  có thể suy ra được từ đồ thị (C) của hàm số  $y = f(x)$  như sau:

- + Giữ nguyên phần đồ thị bên phải trục tung (ta tạm gọi là  $(C_1)$ ), bỏ phần bên trái.
- + Phần bên trái trục tung có được bằng cách lấy đối xứng của  $(C_2)$  qua trục tung.
- + Ví dụ :



**Ví dụ 37.** Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số  $y = x^4 - 2x^2 - 1$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

**Ví dụ 39.** Tìm các đường tiệm cận của hàm số  $y = \left| x^3 - 3x^2 + 2 \right|$

[illegible]

a)  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$       b)  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$       c)  $y = -x^3 + 3x^2 - 2$   
d)  $y = (x-1)^2(4-x)$       e)  $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{1}{3}$       f)  $y = -x^3 - 3x^2 - 4x + 2$

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = x^4 - 2x^2 - 1 & \text{b) } y = x^4 - 4x^2 + 1 & \text{c) } y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2} \\ \text{d) } y = (x-1)^2(x+1)^2 & \text{e) } y = -x^4 + 2x^2 + 2 & \text{f) } y = -2x^4 + 4x^2 + 8 \end{array}$$
$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \frac{x+1}{x+2} & \text{b) } y = \frac{2x+1}{x-1} & \text{c) } y = \frac{3-x}{x-4} \\ \text{d) } y = \frac{1-2x}{1+2x} & \text{e) } y = \frac{3x-1}{x-3} & \text{f) } y = \frac{x-2}{2x+1} \end{array}$$

---

---

Trang 43

a)  $y = |x|^3 - 3|x| + 2$

b)  $y = |-x^3 + 3x^2 - 2|$

c)  $y = |x^4 - 2x^2 - 3|$

d)  $y = \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**Câu 1.** Bảng biến thiên dưới đây là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D?

|    |           |      |      |           |     |
|----|-----------|------|------|-----------|-----|
| x  | $-\infty$ | $-2$ | $1$  | $+\infty$ |     |
| y' | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| y  | $-\infty$ | $20$ | $-7$ | $+\infty$ |     |

A.  $y = -2x^3 - 3x^2 + 12x$ .

B.  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ .

C.  $y = -2x^4 - 3x^2 + 12x$ .

D.  $y = 2x^3 - 3x^2 + 12x$ .

**Câu 2.** Bảng biến thiên sau là của hàm số nào ?

|      |           |            |      |            |           |            |      |            |           |
|------|-----------|------------|------|------------|-----------|------------|------|------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$       | $0$  | $1$        | $+\infty$ |            |      |            |           |
| $y'$ | $-$       | $0$        | $+$  | $0$        | $-$       | $0$        | $+$  |            |           |
| $y$  | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $-1$      | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

A.  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ .

B.  $y = x^4 - 2x^2 - 1$ .

C.  $y = x^4 - x^2 - 1$ .

D.  $y = -x^4 + 2x^2 - 1$ .

**Câu 3.** Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào ?

|    |           |     |             |
|----|-----------|-----|-------------|
| x  | $-\infty$ | 1   | $+\infty$   |
| y' | +         | 0   | +           |
| y  | $-\infty$ | ↗ 1 | ↘ $+\infty$ |

A.  $y = x^4 - 3x^2 + 1$

B.  $y = x^3 - 1$ . C.  $y = x^4 + 3x^2 - 1$ . D.  $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + \frac{2}{3}$

**Câu 4.** Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$      | $+\infty$ |
| $y'$ | -         |           | -         |
| $y$  | 2         | $+\infty$ | 2         |

A.  $y = \frac{2x-1}{x+1}$ .

B.  $y = \frac{2x+1}{x+1}$ .

C.  $y = \frac{2x}{x+1}$ .

D.  $y = \frac{2x+3}{x+1}$ .

**Câu 5.** Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình bên

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 2         | $+\infty$ |
| $y'$ | -         |           | -         |
| $y$  | 1         | $+\infty$ | 1         |

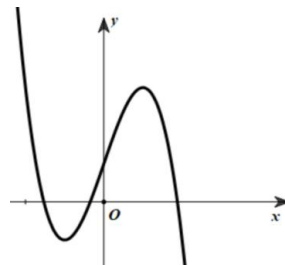
A.  $y = \frac{2x-1}{x-2}$ .

B.  $y = \frac{2x-3}{x+2}$ .

C.  $y = \frac{x+3}{x-2}$ .

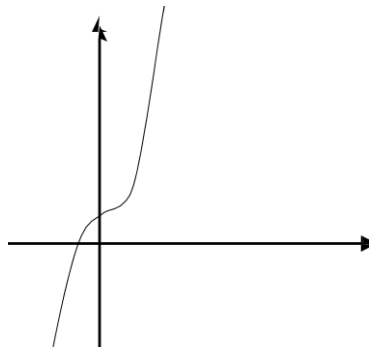
D.  $y = \frac{2x-7}{x-2}$ .

**Câu 6. (Đề 108-2019).** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



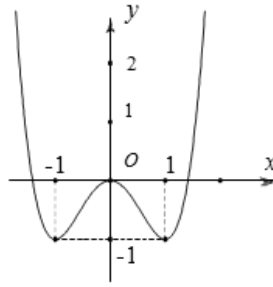
A.  $y = x^3 - 3x + 1$ . B.  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ . C.  $y = -x^3 + 3x + 1$ . D.  $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ .

**Câu 7.** Đồ thị dưới đây là của hàm số nào ?



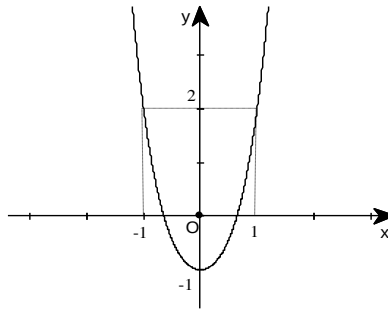
A.  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ . B.  $y = x^3 + x^2 + 1$ . C.  $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ . D.  $y = x^3 + x + 1$ .

**Câu 8.** Đồ thị như hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



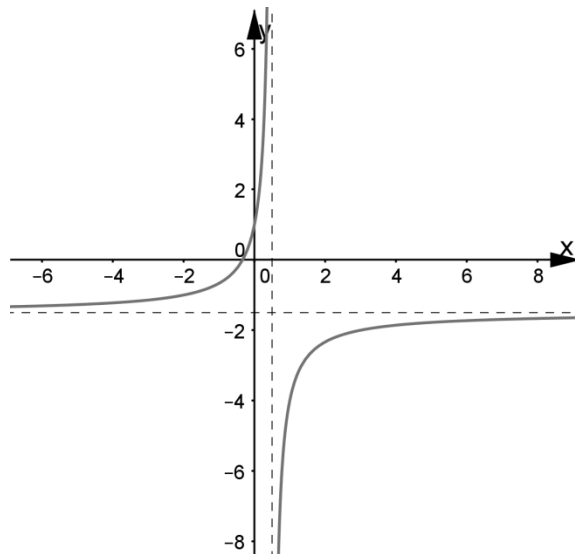
**A.**  $y = x^4 - 2x^2$ . **B.**  $y = x^4 - 2x^2 - 3$ . **C.**  $y = -x^4 + 2x^2$ . **D.**  $y = -x^4 + 2x^2 - 3$ .

**Câu 9.** Đường cong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



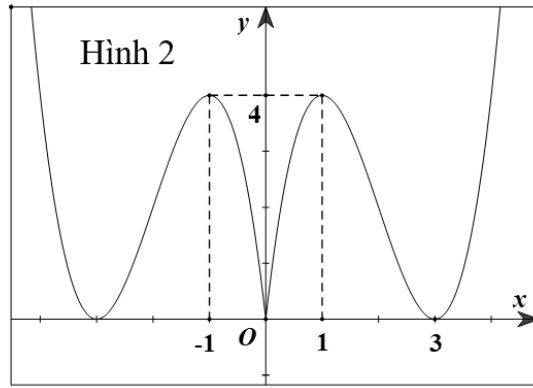
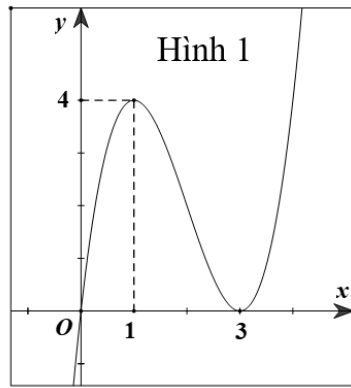
**A.**  $y = x^2 - 1$ . **B.**  $y = x^4 + 2x^2 - 1$ . **C.**  $y = -x^4 - 2x^2 - 1$ . **D.**  $y = x^3 + 2x^2 - 1$

**Câu 10.** Đường cong hình bên dưới là đồ thị hàm số nào trong 4 hàm số sau:



**A.**  $y = \frac{3x-1}{1-x}$ . **B.**  $y = \frac{3x+1}{1-2x}$ . **C.**  $y = \frac{3x-1}{-1-2x}$ . **D.**  $y = \frac{3x-2}{1-x}$ .

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$  có đồ thị như Hình 1. Khi đó đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?.



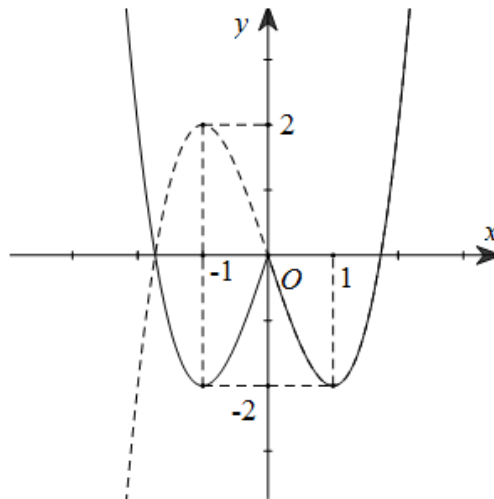
A.  $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$ .

B.  $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$ .

C.  $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$ .

D.  $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$ .

**Câu 12.** Cho đường cong ( $\Gamma$ ) được vẽ bởi nét liền trong hình vẽ:



Hỏi ( $\Gamma$ ) là dạng đồ thị của hàm số nào?

A.  $y = -|x|^3 + 3|x|$ .

B.  $y = |x^3 - 3x|$ .

C.  $y = x^3 - 3x$ .

D.  $y = |x^3| - 3|x|$ .

## VII. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN KHẢO SÁT HÀM SỐ

### 1. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA CÁC ĐỒ THỊ

Cho hai đồ thị (C):  $y = f(x)$  và (C'):  $y = g(x)$

Tọa độ điểm chung của (C) và (C') là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Phương trình  $f(x) = g(x)$  (\*) gọi là phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C').

**a. Số nghiệm của phương trình (\*) chính là số giao điểm của (C) và (C').**

**b. Dựa vào điều kiện có nghiệm của phương trình để biện luận**

**Nhắc lại:**

1. Đường thẳng d qua  $A(x_1; y_1)$  và có hệ số góc k thì có phương trình:

$$y = k(x - x_1) + y_1$$

2. Cho  $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2) \Rightarrow MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

**Ví dụ 41.** Tìm giao điểm của đồ thị các hàm số sau (C):  $y = x^3 - 5x^2 + 10x - 5$  (P):  $y = x^2 - x + 1$

.....

.....

.....

**Ví dụ 42.** Tìm m để đồ thị các hàm số:  $y = (x - 1)(x^2 - mx + m^2 - 3)$  cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 43.** Tìm  $m$  để đồ thị các hàm số sau:  $y = x^4 - 2x^2 - 1$ ;  $y = m$  cắt nhau tại bốn điểm phân biệt.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1 :** Tìm tọa độ giao điểm của các đồ thị của các hàm số sau:

a) 
$$\begin{cases} y = -\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{3}{2} \\ y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} y = \frac{2x-4}{x-1} \\ y = -x^2 + 2x + 4 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} y = 4x^3 - 3x \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} y = x^4 - x^2 + 1 \\ y = 4x^2 - 5 \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{x-1} \\ y = -3x + 1 \end{cases}$$

**Bài 2: (\*)** Tìm  $m$  để đồ thị các hàm số:

a)  $y = (x-1)(x^2 - mx + m^2 - 3)$  cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

b)  $y = x^3 + 3x^2 + mx + 2m$ ;  $y = -x + 2$  cắt nhau tại ba điểm phân biệt.

c)  $y = x^4 - 2x^2 - 1$ ;  $y = m$  cắt nhau tại bốn điểm phân biệt.

d)  $y = x^4 - mx^2 + m - 1$  cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

**Bài 3 (\*\*)** Tìm  $m$  để đồ thị của các hàm số:  $y = \frac{3x+1}{x-4}$ ;  $y = x + 2m$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt

A, B. Khi đó tìm  $m$  để đoạn AB ngắn nhất.

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**Câu 1:** Số giao điểm của đường cong  $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$  và đường thẳng  $y = 1 - x$  bằng  
**A. 1.** **B. 2.** **C. 3.** **D. 0.**

**Câu 2:** Tìm số giao điểm của đồ thị  $(C): y = x^3 + x - 2$  và đường thẳng  $y = x - 1$ .  
**A. 2.** **B. 3.** **C. 0.** **D. 1.**

**Câu 3:** Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = x^4 - 4x^2 + 1$  và đường thẳng  $y = -3$ .  
**A. 0.** **B. 2.** **C. 3.** **D. 4.**

**Câu 4:** Tung độ giao điểm của đồ thị các hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$ ,  $y = -2x + 8$  là:  
**A. 2.** **B. 4.** **D. 0.** **D. 6.**

**Câu 5:** Tung độ giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-3}{x+3}$  và đường thẳng  $y = x - 1$  là:  
**A. 0.** **B. 3.** **C. -1.** **D. -3.**

**Câu 6:** Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = (x-2)(x^2 + x + 1)$  và trục hoành.  
**A. 1.** **B. 0.** **C. 2.** **D. 3.**

**Câu 7:** Đồ thị của hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 1$  và đồ thị của hàm số  $y = 3x^2 - 2x - 1$  có tất cả bao nhiêu điểm chung?  
**A. 1.** **B. 3.** **C. 2.** **D. 0.**

**Câu 8:** Gọi  $M, N$  là giao điểm của đường thẳng  $y = x + 1$  và đường cong  $y = \frac{2x+4}{x-1}$ . Hoành độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $MN$  bằng:

**A.  $-\frac{5}{2}$ .** **B. 1.** **C. 2.** **D.  $\frac{5}{2}$ .**

**Câu 9:** Đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^2 - 3x + 1$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$ . Tính độ dài đoạn  $AB$

**A.  $AB = 3$ .** **B.  $AB = 2\sqrt{2}$ .** **C.  $AB = 2$ .** **D.  $AB = 1$ .**

**Câu 10:** Tìm  $m$  để đường thẳng  $d: y = m(x-1) + 1$  cắt đồ thị  $(C)$  hàm số  $y = -x^3 + 3x - 1$  tại ba điểm phân biệt  $A(1; 1)$ ,  $B$ ,  $C$ .

**A.  $m \neq 0$ .** **B.  $m < \frac{9}{4}$ .**  
**C.  $0 \neq m < \frac{9}{4}$ .** **D.  $m = 0$  hoặc  $m > \frac{9}{4}$ .**

**Câu 11:** Cho hàm số  $y = \frac{2x-3}{x-1}$ . Đồ thị hàm số cắt đường thẳng  $y = x + m$  tại 2 giao điểm khi

**A.  $m < -1; m > 3$ .** **B.  $m \leq -1; m \geq 3$ .**  
**C.  $-1 < m < 3$ .** **D.  $m < 1; m > 7$ .**



**A. BÀI TẬP TỰ LUẬN****Bài 1 :** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x + 1$ 

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

b. Dựa vào đồ thị, biện luận theo m số nghiệm pt:  $x^3 - 3x + m = 0$ **Bài 2.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ 

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

b. Dựa vào đồ thị, biện luận theo m số nghiệm pt:  $x^4 - 6x^2 + 3 = m$ **Bài 3.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2$  có đồ thị là (C).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

b. Tìm m để phương trình  $-x^3 + 3x^2 + 1 - m = 0$  có đúng một nghiệm**Bài 4.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 1$  có đồ thị (C)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)

b. Xác định k để phương trình  $x^3 - 3x^2 + k = 0$  có 3 nghiệm phân biệt**Bài 5.** Cho hàm số  $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ 

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C)

b. Tìm m để phương trình  $x^4 - 2x^2 + m = 0$  có 4 nghiệm phân biệt**Bài 6.** Cho hàm số  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ 

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị

b. Tìm m để phương trình  $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$  có 6 nghiệm phân biệt**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****Câu 1.** Tìm m để phương trình  $x^3 - 3x + m = 0$  có 3 nghiệm thực phân biệt**A.**  $-2 \leq m \leq 2$ . **B.**  $-2 < m < 2$ . **C.**  $-2 < m; m > 2$ . **D.**  $-1 < m < 1$ .**Câu 2.** Tìm tất cả các giá trị m để phương trình  $x^3 - 3x = 2m$  có 3 nghiệm phân biệt**A.**  $-2 < m < 2$ . **B.**  $-1 < m < 1$ . **C.**  $-2 \leq m \leq 2$ . **D.**  $-1 \leq m \leq 1$ .**Câu 3.** Phương trình  $x^4 - 2x^2 - 2 = m$  có bốn nghiệm phân biệt khi:**A.**  $-3 < m < -2$ . **B.**  $m < -3; m > -2$ . **C.**  $-3 \leq m \leq -2$ . **D.**  $m = 3$ .

**Câu 4.** Xác định  $m$  để đường thẳng  $y = 4m$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 4$  tại 3 điểm phân biệt?

A.  $m = 1$ .

B.  $m = 4$ .

C.  $3 < m < 4$ .

D.  $m = 3$ .

**Câu 5.** Tìm  $m$  để đường thẳng  $y = 4m$  cắt đồ thị hàm số (C):  $y = x^4 - 8x^2 + 3$  tại 4 phân biệt:

A.  $-\frac{13}{4} < m < \frac{3}{4}$ .

B.  $m \leq \frac{3}{4}$ .

C.  $m \geq -\frac{13}{4}$ .

D.  $-\frac{13}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$ .

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Khi đó tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình  $f(x) = m - 1$  có ba nghiệm thực là

|      |           |            |     |            |     |            |
|------|-----------|------------|-----|------------|-----|------------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$       | $0$ | $+\infty$  |     |            |
| $y'$ |           | $+$        | $0$ | $-$        | $0$ | $+$        |
| $y$  |           |            | $5$ |            | $3$ | $+\infty$  |
|      | $-\infty$ | $\nearrow$ |     | $\searrow$ |     | $\nearrow$ |

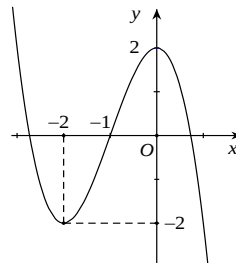
A.  $m \in (3; 5)$ .

B.  $m \in (4; 6)$ .

C.  $m \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$ .

D.  $m \in [4; 6]$ .

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = -x^3 - 3x^2 + 2$  có đồ thị như hình vẽ.



Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $-x^3 - 3x^2 + 1 - m = 0$  có ba nghiệm phân biệt?

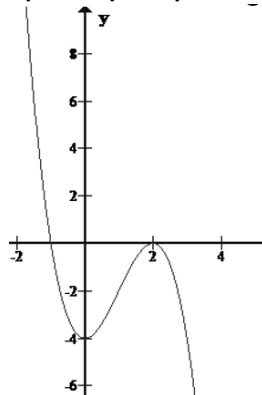
A.  $-1 < m < 3$ .

B.  $-3 \leq m \leq 1$ .

C.  $-3 < m < 1$ .

D.  $m < 1$ .

**Câu 8.** Đồ thị hình bên là của hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ . Tìm tất cả giá trị của  $m$  để phương trình  $x^3 - 3x^2 + m = 0$  có hai nghiệm phân biệt? Chọn một khẳng định ĐÚNG



A.  $m = 4$  hoặc  $m = 0$ .

B.  $m = 4$ .

C.  $0 < m < 4$ .

D.  $m = 0$ .

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|         |           |      |      |     |           |     |      |     |           |
|---------|-----------|------|------|-----|-----------|-----|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $0$  | $2$ | $+\infty$ |     |      |     |           |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ | $0$  | $+$ |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      | $-2$ |     | $1$       |     | $-2$ |     | $+\infty$ |

Số nghiệm thực của phương trình  $2f(x) + 3 = 0$

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

**Câu 9. (Đề 108- 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |      |      |     |           |     |      |     |           |
|---------|-----------|------|------|-----|-----------|-----|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $0$  | $2$ | $+\infty$ |     |      |     |           |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ | $0$  | $+$ |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      | $-1$ |     | $2$       |     | $-1$ |     | $+\infty$ |

Số nghiệm thực của phương trình  $3f(x) - 5 = 0$  là

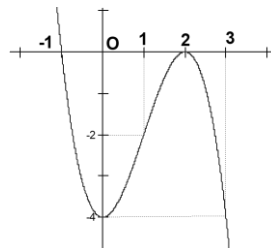
A. 4.

B. 2.

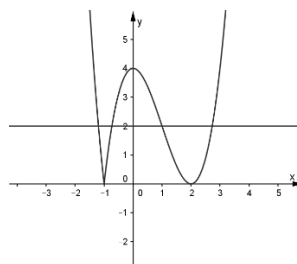
C. 0.

D. 3.

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là hình sau. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $|f(x)| = m + 1$  có 4 nghiệm thực phân biệt

A.  $m \leq -4$  hay  $m > 0$ .B.  $-4 < m \leq 0$ .C.  $0 < m < 4$ .D.  $-1 < m < 3$ .

**Câu 11.** Hình vẽ bên là đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = x^3 - 3x - 1$ . Giá trị của  $m$  để phương trình  $|x^3 - 3x - 1| = m$  có 3 nghiệm đôi một khác nhau là.

A.  $m = 0$ .B.  $1 < m < 3$ .C.  $-3 < m < 1$ .D.  $m = 0, m = 3$ .

**Câu 12:** Tìm  $m$  để phương trình  $x^3 - 3x^2 + m - 1 = 0$  có ba nghiệm thực phân biệt

A.  $-1 < m < 5$ .B.  $1 < m < 5$ .C.  $-5 < m < 1$ .D.  $1 \leq m \leq 5$ .



**Ví dụ 46.** Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số  $y = \frac{x+2}{x-1}$ . Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng

$$d : y = -3x + 10.$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 47.** Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ . Biết tiếp tuyến vuông với đường thẳng  $d : y = x + 2021$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 47.** Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ . Biết tiếp tuyến vuông với đường thẳng  $d : y = x + 2021$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 48.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số  $y = x^3 - x^2 + 9x - 3$  biết tiếp tuyến đi qua  $A(2; -1)$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm được chỉ ra:

a) (C):  $y = 3x^3 - x^2 - 7x + 1$  tại  $A(0; 1)$

b) (C):  $y = x^4 - 2x^2 + 1$  tại  $B(1; 0)$

c) (C):  $y = \frac{3x+4}{2x-3}$  tại  $C(1; -7)$

**Bài 2.** Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm được chỉ ra:

a) (C):  $y = \frac{x+1}{x-2}$  tại các giao điểm của (C) với trục tung.

b) (C):  $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$  tại các giao điểm của (C) với trục hoành.

**Bài 3.** Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với đường được chỉ ra:

a) (C):  $y = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 4$  và d:  $y = 7x + 4$ .

b) (C):  $y = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 4$  và (P):  $y = -x^2 + 8x - 3$ .

**Bài 4.** Viết phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  của (C), biết  $\Delta$  có hệ số góc k được chỉ ra:

a) (C):  $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$ ;  $k = 12$

b) (C):  $y = \frac{2x-1}{x-2}$ ;  $k = -3$

**Bài 5.** Viết phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  của (C), biết  $\Delta$  song song với đường thẳng  $d$  cho trước:

a) (C):  $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$  ; d:  $y = 3x + 2$       b) (C):  $y = \frac{2x-1}{x-2}$  ; d:  $y = -\frac{3}{4}x + 2$

**Bài 6.** Viết phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  của (C), biết  $\Delta$  vuông góc với đường thẳng  $d$  cho trước:

a) (C):  $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$  ; d:  $y = -\frac{x}{8} + 2$       b) (C):  $y = \frac{2x-1}{x-2}$  ; d:  $y = x$

**Bài 7.** (\*) Viết phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  của (C), biết  $\Delta$  đi qua điểm được chỉ ra:

a) (C):  $y = -x^3 + 3x - 2$  ; A(2; -4)      b) (C):  $y = \frac{x+2}{x-2}$  ; E(-6; 5)

## B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  tại điểm  $M(-1; -2)$  ?

A.  $y = 9x + 11$ .      B.  $y = 9x - 11$ .      C.  $y = 9x - 7$ . D.  $y = 9x + 7$ .

**Câu 2.** Phương trình tiếp tuyến của đường cong (C):  $y = x^4 - 3x^2 + 4$  tại điểm  $A(1; 2)$  là

A.  $y = 3x + 5$ .      B.  $y = 2x + 4$ .      C.  $y = -2x + 4$ . D.  $y = -2x$ .

**Câu 3.** Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^3 - x^2 + x + 1$  tại điểm có tung độ bằng 2

A.  $y = 2x$ .      B.  $y = 9x - 11$ .

C.  $y = 2x$  và  $y = 2x + \frac{32}{27}$ .      D.  $y = 2x + 4$ .

**Câu 4.** Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-4}{x-4}$  tại điểm có tung độ bằng 3.

A.  $x + 4y - 20 = 0$ .      B.  $x + 4y - 5 = 0$ .      C.  $4x + y - 20 = 0$ .      D.  $4x + y - 5 = 0$ .

**Câu 5.** Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \frac{x-2}{2x-1}$  với trục  $Ox$ . Tiếp tuyến tại A của đồ thị hàm số đã cho có hệ số góc  $k$  là

A.  $k = -\frac{5}{9}$ .      B.  $k = \frac{1}{3}$ .      C.  $k = -\frac{1}{3}$ .      D.  $k = \frac{5}{9}$ .

**Câu 6.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{x-5}$  tại điểm  $A(-1; 0)$  có hệ số góc bằng

A.  $\frac{1}{6}$ .      B.  $-\frac{1}{6}$ .      C.  $\frac{6}{25}$ .      D.  $-\frac{6}{25}$ .

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$  có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng  $d: y = 9x$  có phương trình là

**A.**  $y = 9x + 40$ .

**B.**  $y = 9x - 40$ .

**C.**  $y = 9x + 32$ .

**D.**  $y = 9x - 32$ .

**Câu 8.** Gọi  $(C)$  là đồ thị của hàm số  $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 2$ . Có hai tiếp tuyến của  $(C)$  cùng song song với đường thẳng  $y = -2x + 5$ . Hai tiếp tuyến đó là :

**A.**  $y = -2x + \frac{10}{3}$  và  $y = -2x + 2$ .

**B.**  $y = -2x + 4$  và  $y = -2x - 2$ .

**C.**  $y = -2x - \frac{4}{3}$  và  $y = -2x - 2$ .

**D.**  $y = -2x + 3$  và  $y = -2x - 1$ .

**Câu 9.** Hỏi có bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+3}{2x-1}$ , biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $y = \frac{1}{2}x$  ?

**A.** 0.

**B.** 1.

**C.** 2.

**D.** 3.

**Câu 10.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x + 2$  vuông góc với đường thẳng  $y = -\frac{1}{9}x$  là

**A.**  $y = 9x + 18; y = 9x - 14$ .

**B.**  $y = -\frac{1}{9}x + 18; y = -\frac{1}{9}x + 5$

**C.**  $y = 9x + 18; y = 9x + 5$ .

**D.**  $y = \frac{1}{9}x + 18; y = \frac{1}{9}x - 14$

## VIII. ÔN TẬP KHẢO SÁT HÀM SỐ

### A. PHẦN TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho hàm số:  $y = x^3 + ax^2 - 4$ ,  $a$  là tham số.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị với  $a = 3$ .

b) Tìm các giá trị của tham số  $a$  để phương trình sau có nghiệm duy nhất:  $x^3 + ax^2 - 4 = 0$

ĐS:      b)  $a < 3$ .

**Bài 2.** a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ .

b) Từ một điểm bất kỳ trên đường thẳng  $x = 2$  ta kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến tới đồ thị của hàm số?

ĐS:      b) một tiếp tuyến.

**Bài 3.** a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:  $y = x^4 - 2x^2 - 1$       (1)

b) (\*) Với những giá trị nào của  $m$  thì phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt.

$$|x^4 - 2x^2 - 1| = \log_4 m \quad (2)$$

ĐS:      b)  $4 < m < 16$ .

**Bài 4.** Cho hàm số:  $y = x^4 - 5x^2 + 4$       (1)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đường thẳng  $y = m$  cắt đồ thị (C) của hàm số tại 4 điểm phân biệt.

ĐS:      b)  $-\frac{9}{4} < m < 4$

**Bài 5.** Cho hàm số:  $y = \frac{1}{2}x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$       (1)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi  $m = 3$ .

b) Viết phương trình tiếp tuyến đi qua  $A\left(0; \frac{3}{2}\right)$  tiếp xúc với (C).

c) (\*) Xác định  $m$  để hàm số (1) có cực tiểu mà không có cực đại.

ĐS:      b)  $y = \frac{3}{2}; y = \pm 2\sqrt{2}x + \frac{3}{2}$       c)  $m \leq 0$ .

**Bài 6.** Cho hàm số:  $y = \frac{3x+4}{x-1}$  (H)

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.  
 b) Với giá trị nào của a, đường thẳng  $y = ax + 3$  không cắt đồ thị (H)?  
 c) (\*) Qua điểm  $M(2; 3)$  viết phương trình tiếp với đồ thị (H).

ĐS: b)  $-28 < a \leq 0$  c)  $y = -28x + 59$ .

**Bài 7.** Cho hàm số:  $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2) + m^2 - m^2$  (1) (m là tham số)

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi  $m = 1$ .  
 b) Tìm k để phương trình  $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$  có 3 nghiệm phân biệt.  
 c) Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

ĐS: b)  $-1 < k < 3; k \neq 0; k \neq 2$ ; c)  $y = 2x - m^2 + m$

**Bài 8.** Cho hàm số:  $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$  (1) (m là tham số)

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi  $m = 1$ .  
 b) Tìm m để hàm số (1) có ba điểm cực trị.

ĐS: b)  $m < -3$  hay  $0 < m < 3$ .

## B. PHẦN TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào nghịch biến trên R:

- A.  $y = \frac{x-1}{x+5}$       B.  $y = \sqrt{4-x^2}$       C.  $y = -x^4 + 2x^2 - 1$       D.  $y = -2x^3 + 3$

**Câu 2.** Số cực trị của hàm số  $y = -x^4 + 6x^2 - 8x + 1$  là:

- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

**Câu 3.** Tìm giá trị cực đại của hàm số  $y = x^3 - 3x + 2$

- A. 4      B. 1      C. 0      D. -1

**Câu 4.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$  trên đoạn  $[-1; 2]$  là

- A. 6      B. 10      C. 15      D. 11

**Câu 5.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{3-3x}{x^2-1}$  có bao nhiêu tiệm cận

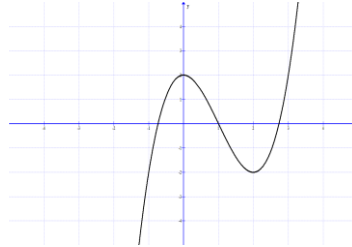
- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

**Câu 6.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{-x-3}{x+2}$ . Trong các câu sau, chọn câu đúng.

- A. Nhận  $I(-2, 1)$  làm tâm đối xứng.      B. Nhận  $I(2, 1)$  làm tâm đối xứng.

C. Nhận  $I(-2, -1)$  làm tâm đối xứng.D. Nhận  $I(2, -1)$  làm tâm đối xứng.

**Câu 7.** Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào?

A.  $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ B.  $y = x^3 - 3x^2 + 2$ C.  $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ D.  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ 

**Câu 8.** Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào? Chọn câu đúng.

|      |           |    |   |   |           |
|------|-----------|----|---|---|-----------|
| x    | $-\infty$ | -1 |   | 1 | $+\infty$ |
| $y'$ | -         | 0  | + | 0 | -         |
| y    | $+\infty$ |    |   | 3 | $-\infty$ |

Arrows indicate the behavior of the function: from  $+\infty$  at  $x = -\infty$  down to -1 at  $x = -1$ , up to 3 at  $x = 1$ , and down to  $-\infty$  at  $x = +\infty$ .

A.  $y = -x^3 + 3x + 1$ B.  $y = x^3 + 3x + 1$ C.  $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ D.  $y = x^3 - 3x^2 + 2$ 

**Câu 9.** Số giao điểm của hai đường cong  $y = x^3 - 2x^2 - 2x + 1$  và  $y = x^2 - x + 1$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

**Câu 10.** Đồ thị hàm số  $y = x^3 - x^2 + 3x - 2$  cắt đồ thị hàm số  $y = 3x^2 - 2x$  tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó độ dài AB là bao nhiêu ?

A.  $AB = 5\sqrt{2}$ B.  $AB = 2\sqrt{2}$ C.  $AB = 3\sqrt{2}$ D.  $AB = 1$ 

**Câu 11.** Cho hàm số (C):  $y = \frac{2}{x+1}$ . Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm thuộc (C) có tung độ là (-1)

A.  $\frac{1}{2}$ B.  $-\frac{1}{2}$ 

C. 1

D. -1

**Câu 12.** Cho hàm số (C):  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ . Tọa độ điểm M thuộc (C) mà tại điểm đó tiếp tuyến với (C) có hệ số bằng (-3).

- A. (1; -1)                      B. (-1; -3)                      C. (0; 1)                      D. (-1; 3)

**Câu 13.** Cho hàm số  $y = 2x^4 + 3$  đồng biến trên khoảng nào?

- A.  $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$                       B.  $(0; +\infty)$                       C.  $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$                       D.  $(-\infty; 0)$

**Câu 14.** Giá trị m để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 3(m^2 - 1)x$  đạt cực tiểu tại  $x_0 = 2$  là:

- A.  $m = 1$                       B.  $m \neq \pm 1$                       C.  $m = \pm 1$                       D.  $m = -1$

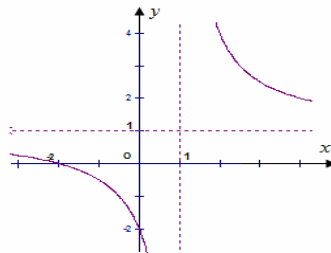
**Câu 15.** Cho  $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x + 2}$ . Hàm số đạt cực trị tại  $x_1, x_2$ . Tổng  $(x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2)$  bằng:

- A. -12                      B. -4                      C. 4                      D. 12

**Câu 16.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x^2 + 5}{x - 1}$  trên đoạn  $[2; 4]$  bằng:

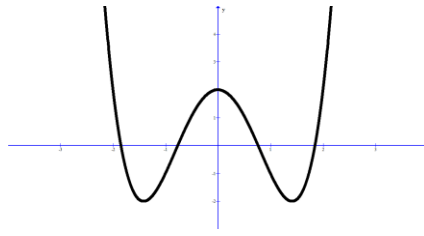
- A. 6                      B. -2                      C. -3                      D. 5

**Câu 17.** Đồ thị trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



- A.  $y = \frac{2x+1}{2x-4}$                       B.  $y = \frac{x+2}{1-x}$                       C.  $y = \frac{x+2}{x-1}$                       D.  $y = \frac{x-1}{x+2}$

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng ?



A.  $a > 0, b > 0, c > 0$

B.  $a > 0, b < 0, c < 0$

C.  $a > 0, b < 0, c > 0$

D.  $a < 0, b > 0, c > 0$

**Câu 19.** Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $x^3 - 12x + m - 2 = 0$  có 3 nghiệm phân biệt.

A.  $-16 < m < 16$

B.  $-18 < m < 14$

C.  $-14 < m < 18$

D.  $-4 < m < 4$

**Câu 20.** Có bao nhiêu tiếp tuyến với (C):  $y = \frac{x+1}{x-2}$  song song với đường thẳng (d):  $3x + 4y - 1 = 0$ .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

**Câu 21.** Với giá trị nào của  $m$  thì hàm số  $y = -\frac{x^3}{3} + 2mx^2 - mx + m - 1$  nghịch biến trên tập xác định.

A.  $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$

B.  $0 < m < \frac{1}{4}$

C.  $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq \frac{1}{4} \end{cases}$

D.  $\begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{1}{4} \end{cases}$

**Câu 22.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ . Với giá trị nào của  $m$  thì hàm số có hai điểm cực trị A và B sao cho  $AB = \sqrt{20}$ .

A.  $m = \pm 1$

B.  $m = \pm 2$

C.  $m = 1; m = 2$

D.  $m = 1$

**Câu 23.** Tìm các giá trị của  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$  trên đoạn  $[0; 1]$  bằng -2.

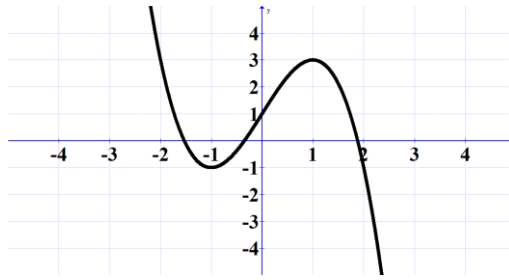
A.  $m = -1$

B.  $m = 2$

C.  $m = -1; m = 2$

D.  $m = 1; m = -2$

**Câu 24.** Đồ thị sau đây là của hàm số  $y = -x^3 + 3x + 1$ . Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình:  $x^3 - 3x - m = 0$  có 3 nghiệm phân biệt



A.  $-1 < m < 3$

B.  $-2 < m < 2$

C.  $-2 \leq m < 2$

D.  $-2 < m < 3$

**Câu 25.** Tìm  $m$  để (C):  $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$  cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

A.  $m < 1$

B.  $m > 1$

C.  $\begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$

D.  $m = 2$

**Câu 26.** Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  và có hệ số góc nhỏ nhất?

A.  $y = -3x - 3$

B.  $y = -x - 3$

C.  $y = -3x + 3$

D.  $y = -5x + 10$

**Câu 27.** Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-3}$  có đồ thị là (C), M là điểm bất kì thuộc (C). Giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C) bằng:

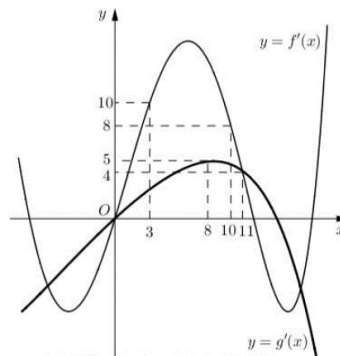
A.  $3\sqrt{7}$

B.  $7\sqrt{7}$

C.  $6\sqrt{7}$

D.  $2\sqrt{7}$

**Câu 28. (Câu 50, MD 101, 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ . Hai hàm số  $y = f'(x)$  và  $y = g'(x)$  có đồ thị như hình bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số  $y = g'(x)$ .



Hàm số  $h(x) = f\left(x+4\right) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$  đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A.  $\left(5; \frac{31}{5}\right)$ .

B.  $\left(\frac{9}{4}; 3\right)$ .

C.  $\left(\frac{31}{5}; +\infty\right)$ .

D.  $\left(6; \frac{25}{4}\right)$ .

## CHƯƠNG II

## HÀM SỐ LŨY THỪA – HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

## I. LŨY THỪA

## 1. Định nghĩa lũy thừa

| Số mũ $\alpha$                                                    | Cơ số $a$          | Lũy thừa $a^\alpha$                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$                                     | $a \in \mathbb{R}$ | $a^\alpha = a^n = a.a.....a$ ( $n$ thừa số $a$ )                                           |
| $\alpha = 0$                                                      | $a \neq 0$         | $a^\alpha = a^0 = 1$                                                                       |
| $\alpha = -n$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )                            | $a \neq 0$         | $a^\alpha = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$                                                        |
| $\alpha = \frac{m}{n}$ ( $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ ) | $a > 0$            | $a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ( $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ ) |
| $\alpha = \lim r_n$ ( $r_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*$ )  | $a > 0$            | $a^\alpha = \lim a^{r_n}$                                                                  |

## 2. Tính chất của lũy thừa

- Với mọi  $a > 0, b > 0$  ta có:

$$a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta} \quad ; \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta} \quad ; \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha.\beta} \quad ; \quad (ab)^\alpha = a^\alpha . b^\alpha \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

- $a > 1 : a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$ ;  $0 < a < 1 : a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

- Với  $0 < a < b$  ta có:

$$a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0; \quad a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$$

**Chú ý:** + Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số  $a$  phải khác 0.

+ Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số  $a$  phải dương.

**3. Định nghĩa và tính chất của căn thức**

• Căn bậc  $n$  của  $a$  là số  $b$  sao cho  $b^n = a$ .

• Với  $a, b \geq 0, m, n \in \mathbb{N}^*, p, q \in \mathbb{Z}$  ta có:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b > 0); \quad \sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p (a > 0); \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\text{Nếu } \frac{p}{n} = \frac{q}{m} \text{ thì } \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q} (a > 0); \text{ Đặc biệt } \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$$

• Nếu  $n$  là số nguyên dương lẻ và  $a < b$  thì  $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ .

Nếu  $n$  là số nguyên dương chẵn và  $0 < a < b$  thì  $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ .

**Chú ý:**

+ Khi  $n$  lẻ, mỗi số thực  $a$  chỉ có một căn bậc  $n$ . Kí hiệu  $\sqrt[n]{a}$ .

+ Khi  $n$  chẵn, mỗi số thực dương  $a$  có đúng hai căn bậc  $n$  là hai số đối nhau.

**Ví dụ 1.** Viết biểu thức  $P = \frac{\sqrt[5]{b^2} \sqrt{b}}{\sqrt[3]{b} \sqrt{b}}$  dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ

.....

.....

.....

**Ví dụ 2.** Rút gọn biểu thức  $P = \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)$

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 3.** So sánh  $m, n$  biết  $(\sqrt{2}-1)^m < (\sqrt{2}-1)^n$

.....

.....

**Ví dụ 4.** Có thể kết luận gì về số  $a$  nếu  $\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$

.....

.....

.....

#### 4. Công thức lãi kép

Gọi  $A$  là số tiền gửi,  $r$  là lãi suất mỗi kì,  $N$  là số kì.

Số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) là:  $C = A(1+r)^N$

**Ví dụ 5. (Đề tham khảo – Bộ GD & ĐT năm 2018 – Câu 22)** Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,4% / tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh bao nhiêu tiền (cả vốn ban đầu và lãi), nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi ? .....

.....

.....

**Ví dụ 6. (THPT QG năm 2018 – Mã đề 104)** Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,1% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra ? .....

.....

.....

.....

.....

**A. BÀI TẬP TỰ LUẬN****Bài 1.** Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

a)  $\sqrt[4]{x^2 \sqrt[3]{x}}, (x \geq 0)$

b)  $\sqrt[5]{\frac{b}{a} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}}, (a, b \neq 0)$

c)  $\sqrt[5]{2 \sqrt[3]{2 \sqrt{2}}}$

d)  $\sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}}}$

e)  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}}$

**Bài 2.** Đơn giản các biểu thức sau:

a)  $\frac{\frac{a^{1,5} + b^{1,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}} - a^{0,5} b^{0,5}}{a - b} + \frac{2b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}}$

b)  $\left( \frac{a^{0,5} + 2}{a + 2a^{0,5} + 1} - \frac{a^{0,5} - 2}{a - 1} \right) \cdot \frac{a^{0,5} + 1}{a^{0,5}}$

c)  $\left( \frac{1}{a^3} - \frac{2}{b^3} \right) \cdot \left( \frac{2}{a^3} + \frac{1}{a^3} \cdot \frac{2}{b^3} + \frac{4}{b^3} \right)$

**Bài 3.** Đơn giản các biểu thức sau:

a)  $\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}}$

b)  $\left( \sqrt{ab} - \frac{ab}{a + \sqrt{ab}} \right) : \frac{\sqrt[4]{ab} - \sqrt{b}}{a - b}$

**Bài 4.** So sánh hai số  $m, n$  nếu:

a)  $3,2^m < 3,2^n$

b)  $(\sqrt{2})^m > (\sqrt{2})^n$

c)  $\left( \frac{1}{9} \right)^m > \left( \frac{1}{9} \right)^n$

d)  $\left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^m > \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n$

e)  $(\sqrt{5} - 1)^m < (\sqrt{5} - 1)^n$

**Bài 5.** Có thể kết luận gì về số  $a$  nếu:

a)  $(a-1)^{-\frac{2}{3}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}}$

b)  $(2a+1)^{-3} > (2a+1)^{-1}$

c)  $\left( \frac{1}{a} \right)^{-0,2} < a^2$

d)  $(1-a)^{-\frac{1}{3}} > (1-a)^{-\frac{1}{2}}$

e)  $(2-a)^{\frac{3}{4}} > (2-a)^2$

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**Câu 1:** Cho  $x, y$  là hai số thực dương và  $m, n$  là hai số thực tùy ý. Đẳng thức nào sau đây là sai?

- A.  $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$       B.  $(xy)^n = x^n \cdot y^n$       C.  $(x^n)^m = x^{nm}$       D.  $x^m \cdot y^n = (xy)^{m+n}$

**Câu 2:** Nếu  $m$  là số nguyên dương, biểu thức nào theo sau đây không bằng với  $(2^4)^m$  ?

- A.  $4^{2m}$       B.  $2^m \cdot (2^{3m})$       C.  $4^m \cdot (2^m)$       D.  $2^{4m}$

**Câu 3:** Giá trị của biểu thức  $A = 9^{2+3\sqrt{3}} : 27^{2\sqrt{3}}$  là:

- A. 9      B.  $3^{4+5\sqrt{3}}$       C. 81      D.  $3^{4+12\sqrt{3}}$

**Câu 4:** Trục căn thức ở mẫu biểu thức  $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$  ta được:

- A.  $\frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}{3}$       B.  $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}$       C.  $\sqrt[3]{75} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{4}$       D.  $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{4}$

**Câu 5:** Rút gọn :  $\frac{(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} \cdot b^6}}}$  ta được :

- A.  $a^2 b$       B.  $ab^2$       C.  $a^2 b^2$       D.  $Ab$

**Câu 6:** Rút gọn :  $\left(a^{\frac{2}{3}} + 1\right) \left(a^{\frac{4}{9}} + a^{\frac{2}{9}} + 1\right) \left(a^{\frac{2}{9}} - 1\right)$  ta được :

- A.  $a^{\frac{1}{3}} + 1$       B.  $a^{\frac{4}{3}} + 1$       C.  $a^{\frac{4}{3}} - 1$       D.  $a^{\frac{1}{3}} - 1$

**Câu 7:** Kết quả  $a^{\frac{5}{2}}$  ( $a > 0$ ) là biểu thức rút gọn của phép tính nào sau đây ?

- A.  $\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a}$       B.  $\frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}$       C.  $a^5 \cdot \sqrt{a}$       D.  $\frac{\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt{a}}$

**Câu 8:** Rút gọn  $A = \frac{a^{\frac{4}{3}} - 8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{ab} + 4b^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(1 - 2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^{-1} - a^{\frac{2}{3}}$  được kết quả:

A. 1

B.  $a + b$ 

C. 0

D.  $2a - b$ 

**Câu 9:** Giả sử với biểu thức A có nghĩa, giá trị của biểu thức  $A = \left( \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{a - b} - \frac{a - b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$

là:

A. 1

B. -1

C. 2

D. -3

**Câu 10:** Biết  $(a-1)^{-2\sqrt{3}} > (a-1)^{-3\sqrt{2}}$ . Khi đó ta có thể kết luận về a là:

A.  $a > 2$ B.  $a > 1$ C.  $1 < a < 2$ D.  $0 < a < 1$ 

**Câu 11:** Cho biểu thức  $P = \sqrt{x^3 \sqrt{x^2 \sqrt{x^3}}}$ ,  $x > 0$ . Xác định k sao cho  $P = x^{\frac{23}{24}}$

A.  $k = 2$ B.  $k = 4$ C.  $k = 6$ D.  $k = 8$ 

**Câu 12:** Giá trị của biểu thức  $(7 + 4\sqrt{3})^{2017} (7 - 4\sqrt{3})^{2016}$  bằng

A.  $7 + 4\sqrt{3}$ B.  $7 - 4\sqrt{3}$ 

C. 1

D.  $(7 + 4\sqrt{3})^{2016}$ 

**Câu 13:** Ông Toàn gửi 50 triệu đồng vào ngân hàng ngân hàng Đông Á theo thể thức lãi kép (đến kỳ hạn mà người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kỳ kế tiếp) với lãi suất 14% một năm. Hỏi sau hai năm ông Toàn thu được cả vốn lẫn lãi bao nhiêu (giả sử lãi suất không thay đổi).

A. 63,98 triệu đồng

B. 64,98 triệu đồng

C. 64,89 triệu đồng

D. 65,89 triệu đồng

## II. LOGARIT

### 1. Định nghĩa

- Với  $a > 0, a \neq 1, b > 0$ , ta có:  $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$

**Chú ý:**  $\log_a b$  có nghĩa khi  $\begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$

- Logarit thập phân:  $\lg b = \log b = \log_{10} b$

- Logarit tự nhiên (logarit Nepe):  $\ln b = \log_e b$  (với  $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281$ )

### 2. Tính chất

- $\log_a 1 = 0$ ;  $\log_a a = 1$ ;  $\log_a a^b = b$ ;  $a^{\log_a b} = b$  ( $b > 0$ )

- Cho  $a > 0, a \neq 1, b, c > 0$ . Khi đó:

$$+ \text{ Nếu } a > 1 \text{ thì } \log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$$

$$+ \text{ Nếu } 0 < a < 1 \text{ thì } \log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$$

### 3. Các qui tắc tính logarit. Với $a > 0, a \neq 1, b, c > 0$ , ta có:

- $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

### 4. Đổi cơ số. Với $a, b, c > 0$ và $a, b \neq 1$ , ta có:

- $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$  hay  $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_{a^\alpha} c = \frac{1}{\alpha} \log_a c$  ( $\alpha \neq 0$ )



**A. BÀI TẬP TỰ LUẬN****Bài 1.** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $\log_2 4 \cdot \log_{\frac{1}{4}} 2$

b)  $\log_5 \frac{1}{25} \cdot \log_{27} 9$

c)  $\log_a \sqrt[3]{\sqrt{a}}$

d)  $4^{\log_2 3} + 9^{\log_3 2}$

**Bài 2.** Tính giá trị của biểu thức logarit theo các biểu thức đã cho:

a) Cho  $\log_2 14 = a$ . Tính  $\log_{49} 32$  theo  $a$ .

b) Cho  $\log_{15} 3 = a$ . Tính  $\log_{25} 15$  theo  $a$ .

c) Cho  $\log_{25} 7 = a$ ;  $\log_2 5 = b$ . Tính  $\log_{\sqrt[3]{5}} \frac{49}{8}$  theo  $a, b$ .

**Bài 3.** Chứng minh các đẳng thức sau (với giả thiết các biểu thức đã cho có nghĩa):

a)  $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$

b)  $\log_{ax}(bx) = \frac{\log_a b + \log_a x}{1 + \log_a x}$

c)  $\frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a b$

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****Câu 1:** Giá trị của  $P = \frac{25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8} - 3}{3^{1+\log_9 4} + 4^{2-\log_2 3} + 5^{\log_{125} 27}}$  là:

A. 8

B. 9

C. 10

D. 12

**Câu 2:**  $10^{2+2\lg 7}$  bằng:

A. 4900

B. 4200

C. 4000

D. 3800

**Câu 3:** Cho  $a > 0$  và  $a \neq 1$ . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:A.  $\log_a x$  có nghĩa với  $\forall x$ B.  $\log_a 1 = a$  và  $\log_a a = 0$ C.  $\log_a xy = \log_a x \cdot \log_a y$ D.  $\log_a x^n = n \log_a x$  ( $x > 0, n \neq 0$ )**Câu 4:** Cho  $a > 0$  và  $a \neq 1$ ,  $x$  và  $y$  là hai số dương. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A.  $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$

B.  $\log_a \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_a x}$

C.  $\log_a (x+y) = \log_a x + \log_a y$

D.  $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$

**Câu 5:** Khẳng định nào đúng:

A.  $\log_3^2 a^2 = 2\log_3^2 a$       B.  $\log_3^2 a^2 = 4\log_3^2 |a|$

C.  $\log_3^2 a^2 = 4\log_3^2 a$       D.  $\log_3^2 a^2 = 2\log_3^2 |a|$

**Câu 6:** Giá trị của  $\log_{a^3} \sqrt{a}$  với  $(a > 0, a \neq 1)$  là:

A.  $\frac{3}{2}$

B. 6

C.  $\frac{1}{6}$

D.  $\frac{2}{3}$

**Câu 7:** Giá trị của  $\log_a a^{\sqrt[5]{a^3 \sqrt{a \sqrt{a}}}}$  là:

A.  $\frac{3}{10}$

B.  $\frac{13}{10}$

C.  $\frac{1}{2}$

D.  $\frac{1}{4}$

**Câu 8:** Cho số thực  $a > 0, a \neq 1$ . Giá trị của biểu thức  $A = \log_a \frac{a^2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a^3}}$

A.  $\frac{193}{60}$

B.  $\frac{73}{60}$

C.  $\frac{103}{60}$

D.  $\frac{43}{60}$

**Câu 9:** Nếu  $\log_a x = \frac{1}{2} \log_a 9 - \log_a 5 + \log_a 2$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) thì x bằng:

A.  $\frac{2}{5}$

B.  $\frac{3}{5}$

C.  $\frac{6}{5}$

D. 3

**Câu 10:** Nếu  $\log_a x = \frac{1}{2}(\log_a 9 - 3\log_a 4)$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) thì x bằng:

A.  $2\sqrt{2}$

B.  $\sqrt{2}$

C.  $\frac{3}{8}$

D. 16

**Câu 11:** Nếu  $\log_2 x = 5\log_2 a + 4\log_2 b$  ( $a, b > 0$ ) thì x bằng:

A.  $a^5 b^4$

B.  $a^4 b^5$

C.  $5a + 4b$

D.  $4a + 5b$

**Câu 12:** Nếu  $\log_7 x = 8\log_7 a^2 - 2\log_7 a^3 b$  ( $a, b > 0$ ) thì x bằng:

A.  $a^4 b^6$

B.  $a^2 b^{14}$

C.  $a^6 b^{12}$

D.  $a^8 b^{14}$

**Câu 13:** Cho  $\lg 2 = a$ . Tính  $\lg 25$  theo  $a$ ?

- A.  $2 + a$                       B.  $2(2 + 3a)$                       C.  $2(1 - a)$                       D.  $3(5 - 2a)$

**Câu 14:** Cho  $\lg 5 = a$ . Tính  $\lg \frac{1}{64}$  theo  $a$ ?

- A.  $2 + 5a$                       B.  $1 - 6a$                       C.  $4 - 3a$                       D.  $6(a - 1)$

**Câu 15:** Cho  $\lg 2 = a$ . Tính  $\lg \frac{125}{4}$  theo  $a$ ?

- A.  $3 - 5a$                       B.  $2(a + 5)$                       C.  $4(1 + a)$                       D.  $6 + 7a$

**Câu 16:** Cho  $\log_2 5 = a$ . Khi đó  $\log_4 500$  tính theo  $a$  là:

- A.  $3a + 2$                       B.  $\frac{1}{2}(3a + 2)$                       C.  $2(5a + 4)$                       D.  $6a - 2$

**Câu 17:** Cho  $\log_2 6 = a$ . Khi đó  $\log_3 18$  tính theo  $a$  là:

- A.  $\frac{2a-1}{a-1}$                       B.  $\frac{1}{a+b}$                       C.  $2a + 3$                       D.  $2 - 3a$

**Câu 18:** Nếu  $\log 3 = a$  thì  $\log 9000$  bằng:

- A.  $a^2 + 3$                       B.  $2a + 3$                       C.  $2a^3$                       D.  $a^3$

**Câu 19:** Cho  $\log_a x = 2, \log_b x = 3, \log_c x = 4$ . Tính giá trị của biểu thức:  $\log_{a^2b\sqrt{c}} x$

- A.  $\frac{6}{13}$                       B.  $\frac{24}{35}$                       C.  $\frac{1}{9}$                       D.  $\frac{12}{13}$

**Câu 20:** Cho  $x^2 + 4y^2 = 12xy$   $x > 0, y > 0$ . Khẳng định đúng là:

- A.  $\log x + \log y = \log 12$                       B.  $\log(x + 2y) - 2\log 2 = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$   
C.  $\log x^2 + \log y^2 = \log(12xy)$                       D.  $2\log x + 2\log y = \log 12 + \log xy$

### III. HÀM SỐ LŨY THỪA

### HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARIT

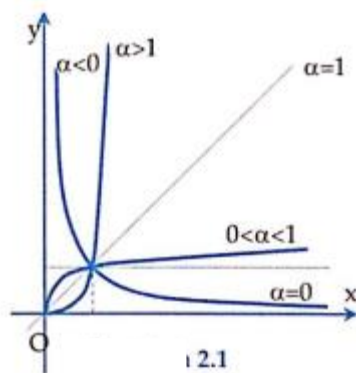
#### 1. Khái niệm

a) Hàm số lũy thừa  $y = x^\alpha$  ( $\alpha$  là hằng số)

| Số mũ $\alpha$                           | Hàm số $y = x^\alpha$ | Tập xác định D                   |
|------------------------------------------|-----------------------|----------------------------------|
| $\alpha = n$ (n nguyên dương)            | $y = x^n$             | $D = \mathbb{R}$                 |
| $\alpha = n$ (n nguyên âm hoặc $n = 0$ ) | $y = x^n$             | $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ |
| $\alpha$ là số thực không nguyên         | $y = x^\alpha$        | $D = (0; +\infty)$               |

**Chú ý:** Hàm số  $y = x^{\frac{1}{n}}$  không đồng nhất với hàm số  $y = \sqrt[n]{x}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

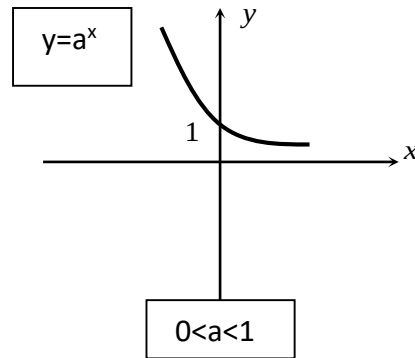
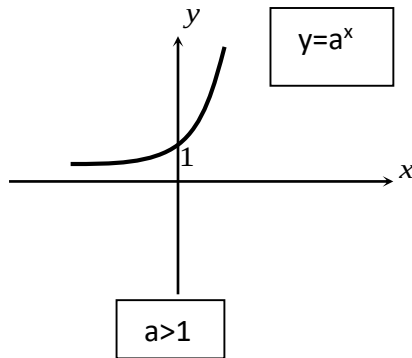
Đồ thị hàm số lũy thừa trên  $(0; +\infty)$  ứng với các giá trị khác nhau của  $\alpha$ .



b) Hàm số mũ  $y = a^x$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ).

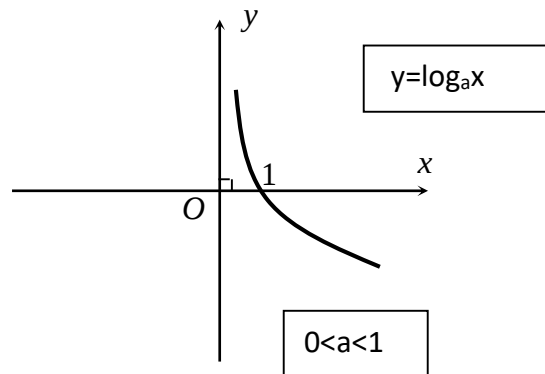
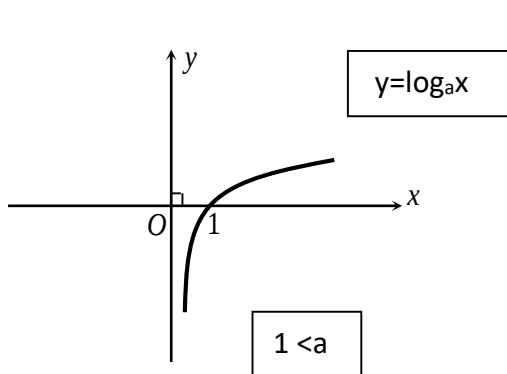
- Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .
- Tập giá trị:  $T = (0; +\infty)$ .

- Khi  $a > 1$  hàm số đồng biến, khi  $0 < a < 1$  hàm số nghịch biến.
- Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.
- Đồ thị:



**c) Hàm số logarit**  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ )

- Tập xác định:  $D = (0; +\infty)$ .
- Tập giá trị:  $T = \mathbb{R}$ .
- Khi  $a > 1$  hàm số đồng biến, khi  $0 < a < 1$  hàm số nghịch biến.
- Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.
- Đồ thị:



**2. Giới hạn đặc biệt**

- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

**3. Đạo hàm**

$$\bullet \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0); \quad (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$$

**Chú ý:**  $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \begin{pmatrix} \text{với } x > 0 \text{ nếu } n \text{ chẵn} \\ \text{với } x \neq 0 \text{ nếu } n \text{ lẻ} \end{pmatrix}. \quad (\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

$$\bullet \quad (a^x)' = a^x \ln a; \quad (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$(e^x)' = e^x; \quad (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$\bullet \quad (\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}; \quad (\log_a |u|)' = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0); \quad (\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$$

**Ví dụ 10.** Tìm tập xác định của hàm số sau  $y = \left( \frac{x^3 + 2x}{x+1} \right)^5$

.....

.....

**Ví dụ 11.** Tìm tập xác định của hàm số sau  $y = (x^2 - 3x + 2)^{-3}$

.....

.....

**Ví dụ 12.** Tìm tập xác định của hàm số sau  $y = (-x^2 + 5x - 6)^{\frac{1}{3}}$

.....

.....

**Ví dụ 13.** Tìm tập xác định của hàm số sau  $y = \log_2(x+1)$

.....

.....

**Ví dụ 14.** Tìm đạo hàm cấp 1 của hàm số sau  $y = e^{x^2+4x-3}$

.....

.....

**Ví dụ 15.** Tìm đạo hàm cấp 1 của hàm số sau  $y = 3^{x^3-3x+1}$

.....

.....

**Ví dụ 16.** Tìm đạo hàm cấp 1 của hàm số sau  $y = \ln(x^2 + 4)$

.....

.....

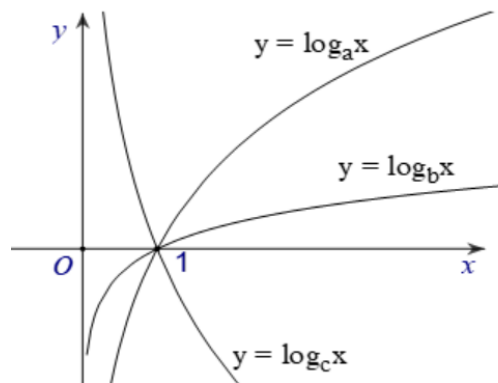
**Ví dụ 17.** Tìm đạo hàm cấp 1 của hàm số sau  $y = \log_5(x^2 + x + 1)$

.....

.....

**Ví dụ 18.** So sánh a, b, c, biết đồ thị bên dưới là của các hàm số

$$y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x, (0 < a, b, c \neq 1)$$



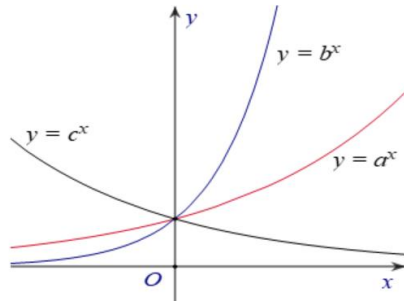
.....

.....

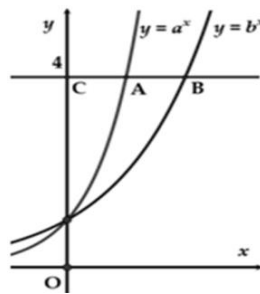
.....

.....

**Ví dụ 19.** So sánh  $a, b, c$ , biết đồ thị bên dưới là của các hàm số  $y = a^x, y = b^x, y = c^x$



**Ví dụ 20.** Cho điểm  $C(0;4)$  đường thẳng đi qua  $C$ , cắt hai đồ thị hàm số  $y = a^x, y = b^x$  lần lượt tại  $A$  và  $B$  sao cho  $AB = AC$ . Tính  $a$  theo  $b$ .



### A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1:** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a)  $y = \left( \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} \right)^3$

b)  $y = (x^2 - 3x + 2)^{-2}$

c)  $y = (x^2 - 2x + 1)^{-\frac{2}{3}}$

d)  $y = (x^2 - 1)^{-\sqrt{2}}$

e)  $y = \log_3(x^2 - 2x)$

f)  $y = \ln(x^2 - 5x + 6) + (x - 1)^\pi$

**Bài 2:** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a)  $y = 3^{x^2 - 2x}$

b)  $y = e^{2x + x^2}$

c)  $y = 2^x \cdot 3^x + \sqrt[3]{x - 1} \quad (x > 1)$

d)  $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$

e)  $y = x \cdot e^{\sqrt{x} - \frac{1}{3}x}$

f)  $y = \frac{3^x}{x^2 - x + 1}$

**Bài 3:** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a)  $y = \ln(2x^2 + x + 3)$

b)  $y = \log_2(\cos x)$

c)  $y = \log(x^2 - 2x)$

d)  $y = (2x - 1)\ln(3x^2 + x)$

e)  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^3 - \cos x)$

f)  $y = \log_3(\cos x)$

### B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** Hàm số nào sau đây có tập xác định là  $\mathbb{R}$  ?

A.  $y = (x^2 + 4)^{0,1}$

B.  $y = (x + 4)^{1/2}$

C.  $y = \left(\frac{x+2}{x}\right)^3$

D.  $y = (x^2 + 2x - 3)^{-2}$

**Câu 2:** Hàm số  $y = \sqrt[3]{1-x^2}$  có tập xác định là:

A.  $[-1; 1]$

B.  $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

C.  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

D.  $\mathbb{R}$

**Câu 3:** Tập xác định D của hàm số  $y = (x^2 - 3x - 4)^{-3}$

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$

B.  $D = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$

C.  $D = [-1; 4]$

D.  $D = (-1; 4)$

**Câu 4:** Tập xác định D của hàm số  $y = (x^3 - 3x^2 + 2x)^{\frac{1}{4}}$

A.  $(0; 1) \cup (2; +\infty)$

B.  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$

C.  $(-\infty; 0) \cup (1; 2)$

D.  $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

**Câu 5:** Tập xác định D của hàm số  $y = (2x - 3)^{\frac{3}{4}} + \sqrt{9 - x^2}$

A.  $[3; +\infty)$

B.  $[-3; 3] \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$

C.  $\left[\frac{3}{2}; 3\right]$

D.  $\left[\frac{3}{2}; 3\right]$

**Câu 6:** Cho hàm số  $y = x^{\frac{\pi}{4}}$ , các kết luận sau, kết luận nào sai:

A. Tập xác định  $D = (0; +\infty)$

B. Hàm số luôn luôn đồng biến với mọi  $x$  thuộc tập xác định

C. Hàm số luôn đi qua điểm  $M(1;1)$

D. Hàm số không có tiệm cận

**Câu 7:** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến trên các khoảng nó xác định ?

A.  $y = x^{-4}$                       B.  $y = x^{-\frac{3}{4}}$                       C.  $y = x^4$                       D.  $y = \sqrt[3]{x}$

**Câu 8:** Hàm số  $y = \sqrt[3]{a+bx^3}$  có đạo hàm là:

A.  $y' = \frac{bx}{3\sqrt[3]{a+bx^3}}$                       B.  $y' = \frac{bx^2}{\sqrt[3]{(a+bx^3)^2}}$

C.  $y' = 3bx^2\sqrt[3]{a+bx^3}$                       D.  $y' = \frac{3bx^2}{2\sqrt[3]{a+bx^3}}$

**Câu 9:** Đạo hàm của hàm số  $y = \sqrt[7]{\cos x}$  là:

A.  $\frac{-\sin x}{7\sqrt[7]{\cos^8 x}}$                       B.  $\frac{\sin x}{7\sqrt[7]{\cos^6 x}}$                       C.  $\frac{1}{7\sqrt[7]{\cos^6 x}}$                       D.  $\frac{-\sin x}{7\sqrt[7]{\cos^6 x}}$

**Câu 10:** Tập xác định D của hàm số  $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$

A.  $D = (-1; 3)$                       B.  $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

C.  $D = [-1; 3]$                       D.  $D = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

**Câu 11:** Tập xác định của hàm số  $y = \log_3 \sqrt{x^2 + x - 12}$

A.  $(-4; 3)$                       B.  $(-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$                       C.  $(-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$                       D.  $[-4; 3]$

**Câu 12:** Hàm số  $y = \ln(-x^2 + 5x - 6)$  có tập xác định là:

A.  $(0; +\infty)$                       B.  $(-\infty; 0)$                       C.  $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$                       D.  $(2; 3)$

**Câu 13:** Hàm số  $y = \frac{1}{1 - \ln x}$  có tập xác định là:

A.  $(0; +\infty) \setminus \{e\}$                       B.  $(0; +\infty)$                       C.  $\mathbb{R}$                       D.  $(0; e)$

**Câu 14:** Tập xác định D của hàm số  $y = \log_4(x-1)^2 - \log_{\frac{1}{2}}(3-x) - \log_8(x+1)^3$

- A.  $D = (-\infty; 3)$       B.  $D = (-1; 3)$       C.  $D = (-1; 3) \setminus \{1\}$       D.  $D = [-1; 3] \setminus \{1\}$

**Câu 15:** Đạo hàm của hàm  $y = e^{x^2+x}$  là:

- A.  $(2x+1)e^{x^2+x}$       B.  $(2x+1)e^x$       C.  $(x^2+x)e^{2x+1}$       D.  $(2x+1)e^{2x+1}$

**Câu 16:** Hàm số  $y = 3^{x^2-3x}$  có đạo hàm là

- A.  $(2x-3) \cdot 3^{x^2-3x} \cdot \ln 3$ .      B.  $3^{x^2-3x} \cdot \ln 3$ .      C.  $(x^2-3x) \cdot 3^{x^2-3x-1}$ .      D.  $(2x-3) \cdot 3^{x^2-3x}$ .

**Câu 17:** Đạo hàm của hàm số  $y = (2x-1)5^x$  là:

- A.  $5^x(2-2x \ln 5 + \ln 5)$       B.  $5^x(2+2x \ln 5 - \ln 5)$   
C.  $2 \cdot 5^x + (2x-1)x \cdot 5^{x-1}$       D.  $2 \cdot 5^x \ln 5$

**Câu 18:** Hàm số  $f(x) = \log_2(x^2-2x)$  có đạo hàm

- A.  $f'(x) = \frac{\ln 2}{x^2-2x}$ .      B.  $f'(x) = \frac{1}{(x^2-2x) \ln 2}$ .  
C.  $f'(x) = \frac{(2x-2) \ln 2}{x^2-2x}$ .      D.  $f'(x) = \frac{(2x-2)}{(x^2-2x) \ln 2}$ .

**Câu 19:** Hàm số  $f(x) = \ln(x^2-1)$  có đạo hàm

- A.  $f'(x) = \frac{1}{x^2-1}$ .      B.  $f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ .  
C.  $f'(x) = \frac{x}{x^2-1}$ .      D.  $f'(x) = \frac{(2x-1)}{(x^2-1) \ln 2}$ .

**Câu 20:** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

- A.  $y = (0,5)^x$       B.  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$       C.  $y = (\sqrt{2})^x$       D.  $y = \left(\frac{e}{\pi}\right)^x$

**Câu 21:** Hàm số nào dưới đây thì nghịch biến trên tập xác định của nó?

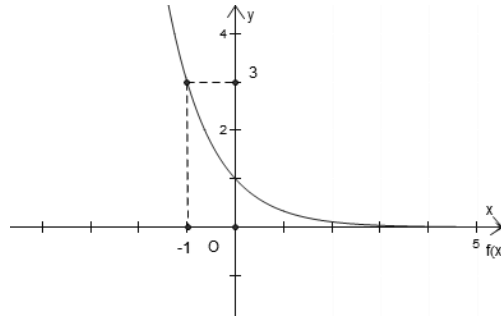
A.  $y = \log_2 x$

B.  $y = \log_{\sqrt{3}} x$

C.  $y = \log_{\frac{e}{\pi}} x$

D.  $y = \log_{\pi} x$

**Câu 22:** Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ ở bên đây ?



A.  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

B.  $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$

C.  $y = 3^x$

D.  $y = (\sqrt{2})^x$

**Câu 23:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = e^{x^2-2x+2}$  trên  $[0; 2]$  là:

A. 1

B. e

C.  $\frac{1}{\sqrt{e}}$

D.  $\sqrt{e}$

**Câu 24:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{\ln x}{x}$  trên  $[1; e^2]$  là:

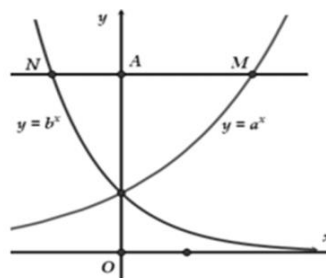
A. 0

B.  $\frac{1}{e}$

C.  $\frac{2}{e^2}$

D. 0

**Câu 25:** Đường thẳng  $y = m$ , cắt hai đồ thị hàm số  $y = a^x, y = b^x$  và trục tung lần lượt tại M, N và A thỏa  $3AN = 2AM$ . Mệnh đề nào đúng



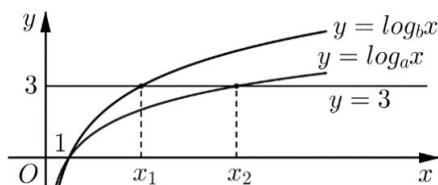
A.  $a^2 = b^3$

B.  $a^3 = b^2$

C.  $2a = 3b$

D.  $a^3 b^2 = 1$

**Câu 26:** Đường thẳng  $y = 3$ , cắt hai đồ thị hàm số  $y = \log_a x, y = \log_b x$  tại điểm  $x_1, x_2$  thỏa  $x_2 = 2x_1$ , giá trị của  $\frac{a}{b}$  bằng

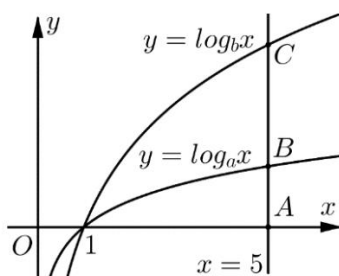


A. 3

B.  $\sqrt{3}$ C.  $\sqrt[3]{2}$ 

D. 2

**Câu 27:** Đường thẳng  $x = 5$ , cắt trục hoành và hai đồ thị hàm số  $y = \log_a x, y = \log_b x$  tại các điểm A, B, C thỏa  $CB = 2AB$ , giá trị của  $\frac{a}{b}$  bằng

A.  $a = b^2$ B.  $a = b^3$ C.  $a^3 = b$ D.  $a = 5b$ 

## IV. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

**1. Phương trình mũ cơ bản:**

Với  $a > 0, a \neq 1$ :

$$a^x = b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ x = \log_a b \end{cases}$$

**Ví dụ 21.** Giải phương trình sau  $2^{x^2+5x+16} = 1024$

.....

.....

.....

.....

.....

**2. Dạng đưa về cùng cơ số:** Với  $a > 0, a \neq 1$ :  $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

**Chú ý:** Trong trường hợp cơ số có chứa ẩn số thì:  $a^M = a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) = 0$

**Ví dụ 22.** Giải phương trình sau  $2^{x^2-1} + 2^{x^2+2} = 3^{x^2} + 3^{x^2-1}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**b) Logarit hoá:**

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = (\log_a b) \cdot g(x)$$

**Ví dụ 23.** Giải phương trình sau  $5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**c) Đặt ẩn phụ:**

• **Dạng 1:**  $P(a^{f(x)}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{f(x)}, t > 0 \\ P(t) = 0 \end{cases}$ , trong đó  $P(t)$  là đa thức theo  $t$ .

• **Dạng 2:**  $\alpha a^{2f(x)} + \beta(ab)^{f(x)} + \gamma b^{2f(x)} = 0$

Chia 2 vế cho  $b^{2f(x)}$ , rồi đặt ẩn phụ  $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$

• **Dạng 3:**  $a^{f(x)} + b^{f(x)} = m$ , với  $ab = 1$ . Đặt  $t = a^{f(x)} \Rightarrow b^{f(x)} = \frac{1}{t}$

**Ví dụ 24.** Giải phương trình sau  $4^{x^2+2} - 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 25.** Giải phương trình sau  $(5 + \sqrt{24})^x + (5 - \sqrt{24})^x = 10$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 26.** Giải phương trình sau  $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**d) Sử dụng tính đơn điệu của hàm số**

Xét phương trình:  $f(x) = g(x) \quad (1)$

- Đoán nhận  $x_0$  là một nghiệm của (1).
- Dựa vào tính đồng biến, nghịch biến của  $f(x)$  và  $g(x)$  để kết luận  $x_0$  là nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} f(x) \text{ đồng biến và } g(x) \text{ nghịch biến (hoặc đồng biến nhưng nghiêm ngặt).} \\ f(x) \text{ đơn điệu và } g(x) = c \text{ hằng số} \end{cases}$$

**Ví dụ 27.** Giải phương trình sau  $2^x + 3^x = 5^x$

.....

.....

.....

.....

.....

**e) Đưa về phương trình các phương trình đặc biệt**

• Phương trình tích  $A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

• Phương trình  $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

**Ví dụ 28.** Giải phương trình sau  $8.3^x + 3.2^x = 24 + 6^x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**A. BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài 1:** Giải các phương trình sau

a)  $9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}$

b)  $(3-2\sqrt{2})^{2x} = 3+2\sqrt{2}$

c)  $3^x \cdot 2^{x+1} = 72$

d)  $16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0,125 \cdot 8^{\frac{x+5}{x-15}}$

e)  $\left(\frac{2}{5}\right)^{4x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{3x+2}$

**Bài 2:** Giải các phương trình sau

a)  $4^x + 2^{x+1} - 8 = 0$

b)  $4^{x+1} - 6 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

c)  $(7+4\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 6$

d)  $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$

e)  $3^{2x^2+2x+1} - 28 \cdot 3^{x^2+x} + 9 = 0$

**Bài 3:** Giải các phương trình sau

a)  $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

c)  $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$

d)  $4^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 9^{\frac{1}{x}}$

**Bài 4: (\*)** Giải các phương trình sau

a)  $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 14$

b)  $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4$

c)  $(3+\sqrt{5})^x + (3-\sqrt{5})^x - 7 \cdot 2^x = 0$

**Bài 5: (\*)** Giải các phương trình sau

a)  $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$

b)  $12 \cdot 3^x + 3 \cdot 15^x - 5^{x+1} = 20$

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****Câu 1:** Nghiệm của phương trình  $10^{\log 9} = 8x + 5$  là

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{5}{8}$

C.  $\frac{7}{4}$

D. 0

**Câu 2:** Nghiệm của phương trình  $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^{2x}$  là:

A. 1

B. 4

C.  $-\frac{1}{4}$

D.  $-\frac{1}{8}$

**Câu 3:** Số nghiệm của phương trình  $2^{2x^2-7x+5}=1$  là

- A. 2                      B. 1                      C. 3                      D. 0

**Câu 4:** Số nghiệm của phương trình  $2^{2+x}-2^{2-x}=15$  là

- A. 3                      B. 2                      C. 1                      D. 0

**Câu 5:** Phương trình  $4^{x^2-x}+2^{x^2-x+1}=3$  có hiệu các nghiệm  $|x_1-x_2|$  bằng:

- A. 2                      B. 1                      C. 0                      D. -1

**Câu 6:** Phương trình  $3.2^x-4^{x-1}-8=0$  có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  và tổng  $x_1+x_2$  là

- A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 5

**Câu 7:** Phương trình  $9^x-3.3^x+2=0$  có 2 nghiệm  $x_1, x_2$ . Giá trị  $A=2x_1+3x_2$  là

- A.  $4\log_2 3$                       B. 2                      C. 0                      D.  $3\log_3 2$

**Câu 8:** Gọi  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm của phương trình:  $5.2^x=7.\sqrt{10^x}-2.5^x$  thì  $x_1^2+x_2^2$  bằng:

- A. 1                      B. 2                      C. 4                      D. 5

**Câu 9:** Tổng các nghiệm của phương trình:  $2^{\frac{x+3}{x+1}}=5-2^{\frac{x-1}{x+1}}$  là :

- A. 0                      B. 2                      C. -2                      D. 4

**Câu 10:** Tổng các nghiệm của phương trình:  $15.25^x-34.15^x+15.9^x=0$  là :

- A. 0                      B. 1                      C. -1                      D. 2

**Câu 11:** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình :  $8.3^x+3.2^x=24+6^x$  là:

- A. 8                      B. 9                      C. 10                      D. 0

**Câu 12:** Tổng các nghiệm của phương trình:  $2^{x^2-x}+2^{2+x-x^2}=5$  là:

- A. 2                      B. 3                      C. 0                      D. 1

**Câu 13:** Phương trình  $8.3^x+3.2^x=24+6^x$  có tích các nghiệm là

- A. 3                      B. 0                      C. 10                      D. 30

**Câu 14:** Phương trình  $9^x - 3 \cdot 3^x + 2 = 0$  có 2 nghiệm  $x_1, x_2$ . Giá trị  $A = 2x_1 + 3x_2$  là

- A.  $4\log_2 3$                       B. 2                      C. 3                      D.  $3\log_3 2$

**Câu 15:** phương trình  $2^{2x-3} + m^2 - m = 0$  có nghiệm là:

- A.  $m > 1$                       B.  $0 < m < 1$                       C.  $m < 0 \vee m > 1$                       D.  $m < 0$

**Câu 16:** Phương trình  $2^{2x+1} - 2^{x+3} - 2m = 0$  có hai nghiệm phân biệt khi:

- A.  $m > 0$                       B.  $m > -4$                       C.  $-4 < m < 0$                       D.  $m < -4$

**Câu 17:** Phương trình  $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  và  $x_1 + x_2 = 3$  khi:

- A.  $m = 1$                       B.  $m = 5$                       C.  $m = 4$                       D.  $m = \frac{3}{2}$

**Câu 18:** Tìm  $m$  để phương trình  $4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m$  có đúng 3 nghiệm.

- A.  $m = 3$ .                      B.  $m = 2$ .                      C.  $m > 3$ .                      D.  $2 < m < 3$ .

## V. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

### 1. Phương trình logarit cơ bản

Với  $a > 0, a \neq 1$ :  $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

**Chú ý:**

• Khi giải phương trình logarit cần chú ý điều kiện để biểu thức có nghĩa.

• Với  $a, b, c > 0$  và  $a, b, c \neq 1$ :  $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

**Ví dụ 29.** Giải phương trình sau  $\log_3(x^2 + 7x + 19) = 2$

.....

.....

.....

### 2. Một số phương pháp giải phương trình logarit

**a) Đưa về cùng cơ số**

$$\text{Với } a > 0, a \neq 1: \quad \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \text{ (hoặc } g(x) > 0) \end{cases}$$

**Ví dụ 30.** Giải phương trình sau  $\log_4 x + \log_{1/16} x + \log_8 x = 5$

.....

.....

.....

.....

.....

**b) Mũ hoá**

$$\text{Với } a > 0, a \neq 1: \quad \log_a f(x) = b \Leftrightarrow a^{\log_a f(x)} = a^b$$

**Ví dụ 31.** Giải phương trình sau  $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$

.....

.....

.....

.....

**c) Đặt ẩn phụ**

**Ví dụ 32.** Giải phương trình sau  $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**d) Sử dụng tính đơn điệu của hàm số**

e) Đưa về phương trình đặc biệt

f) Phương pháp đối lập

Ví dụ 33. Giải phương trình sau  $\log_5(x+3) = 3-x$

.....

.....

.....

• Nếu  $f(x)$  đồng biến (hoặc nghịch biến) thì  $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

Ví dụ 43. Giải phương trình sau  $2x^2 - 8x = \log_2 \frac{2x+1}{(x-1)^2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

g) Đưa về hệ đối xứng loại II

Ví dụ 35. Giải phương trình sau  $7^x = 1 + 6\log_7(6x+1)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1:** Giải các phương trình sau

a)  $\log_2 [x(x-1)] = 1$

b)  $\log_2 x + \log_2 (x-1) = 1$

c)  $\log_2 (x-2) - 6 \cdot \log_{1/8} \sqrt{3x-5} = 2$

d)  $\log_2 (x-3) + \log_2 (x-1) = 3$

**Bài 2:** Giải các phương trình sau

a)  $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{1/3} x = 6$

b)  $1 + \lg(x^2 - 2x + 1) - \lg(x^2 + 1) = 2 \lg(1 - x)$

c)  $\log_4 x + \log_{1/16} x + \log_8 x = 5$

d)  $2 + \lg(4x^2 - 4x + 1) - \lg(x^2 + 19) = 2 \lg(1 - 2x)$

**Bài 3:** Giải các phương trình sau

a)  $\log_2 (9 - 2^x) = 3 - x$

b)  $\log_3 (3^x - 8) = 2 - x$

c)  $\log_7 (6 + 7^{-x}) = 1 + x$

d)  $\log_3 (4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1$

**Bài 4:** Giải các phương trình sau

a)  $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$

b)  $\log_{\sqrt{2}}^2 x + 3 \log_2 x + \log_{1/2} x = 2$

c)  $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$

d)  $\log_{\frac{1}{2}}^2 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$

**Bài 5: (\*)** Giải các phương trình sau :

a)  $\log_2 (3 - x) = x$

b)  $\log_2 x + 2 \cdot \log_7 x = 2 + \log_2 x \cdot \log_7 x$  **B.**

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****Câu 1:** Số nghiệm của phương trình  $\log_3 (x^2 - 6) = \log_3 (x - 2) + 1$  là**A. 3****B. 2****C. 1****D. 0****Câu 2:** số nghiệm của phương trình:  $\log_4 x + \log_4 (x + 3) = 1$  là:**A. 1****B. 2****C. 0****D. 4****Câu 3:** Tập nghiệm của phương trình:  $\log_{\sqrt{3}} |x + 1| = 2$  là:

A.  $\{-3; 2\}$

B.  $\{-4; 2\}$

C.  $\{3\}$

D.  $\{-10; 2\}$

**Câu 4:** Số nghiệm của phương trình sau  $\frac{1}{4 - \log x} + \frac{2}{2 + \log x} = 1$  là:

A. 2

B. 3

C. 1

D. 0

**Câu 5:** Giải phương trình  $\log_2^2 x - 3 \log_2 x + 2 = 0$ . Ta có tổng các nghiệm là:

A. 6

B. 3

C.  $\frac{5}{2}$ .

D.  $\frac{9}{2}$

**Câu 6:** Phương trình:  $\ln x + \ln(3x - 2) = 0$  có mấy nghiệm ?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

**Câu 7:** Phương trình  $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$  có mấy nghiệm?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

**Câu 8:** Số nghiệm phương trình  $\log_3(36 - 3^{x+4}) = 1 - x$  là:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

**Câu 9:** Giải phương trình  $\log_3 x + \log_x 9 = 3$ . Ta có tích các nghiệm là:

A. 3

B. 1

C. 2

D. 27

**Câu 10:** Phương trình  $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$  có tổng các nghiệm là:

A. 81

B. 77

C. 84

D. 30

**Câu 11:** Phương trình  $\log_{\frac{1}{3}} x - 3\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} + 2 = 0$  có tổng các nghiệm là

A.  $\frac{14}{23}$

B.  $\frac{28}{81}$

C.  $\frac{3}{8}$

D.  $\frac{11}{23}$

**Câu 12:** Phương trình  $2(\log_3 x)^2 - 5\log_3(9x) + 3 = 0$  có tích các nghiệm là:

A.  $\frac{27}{\sqrt{5}}$

B. 7

C.  $27\sqrt{3}$

D.  $\frac{27}{\sqrt{3}}$

**Câu 13:** Tìm  $m$  để phương trình  $\log_3^2 x - (m+2) \cdot \log_3 x + 3m - 1 = 0$  có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1 \cdot x_2 = 27$ .

A.  $m = \frac{28}{3}$ .

B.  $m = \frac{4}{3}$ .

C.  $m = 25$ .

D.  $m = 1$ .

**Câu 14: (Đề thi THPT QG 2017 – Mã đề 101 câu 39)** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\log_3^2 x - m \log_3 x + 2m - 7 = 0$  có hai nghiệm thực  $x_1, x_2$ , thỏa mãn  $x_1 x_2 = 81$

A.  $m = -4$ .

B.  $m = 4$ .

C.  $m = 81$ .

D.  $m = 44$ .

**Câu 15:** Giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\log_3^2 x - 3 \log_3 x + 2m - 7 = 0$  có hai nghiệm thực  $x_1, x_2$ , thỏa mãn  $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72$  thuộc khoảng nào sau đây

A.  $(0; 3)$ .

B.  $(3; 6)$ .

C.  $(-6; -3)$ .

D.  $(-3; 0)$ .

**Câu 16: (Đề tham khảo – Bộ GD & ĐT 2020)** Cho phương trình

$\log_2^2(2x) - (m+2) \log_2 x + m - 2 = 0$  ( $m$  tham số). Tập hợp các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[1; 2]$ .

A.  $(1; 2)$ .

B.  $[1; 2]$ .

C.  $[1; 2)$ .

D.  $[2; +\infty)$ .

**Câu 19:** Tích tất cả các nghiệm của phương trình  $\log_2 \frac{2x+1}{(x-1)^2} = 2x^2 - 6x + 2$  bằng

A.  $\frac{1}{2}$ .

B.  $\frac{\sqrt{7}}{2}$ .

C.  $2\sqrt{7}$ .

D. 2.

**Câu 20:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình  $7^x = 1 + 6 \log_7(6x+1)$  bằng

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

## VI. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

- Khi giải các bất phương trình mũ ta cần chú ý tính đơn điệu của hàm số mũ.

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

- Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình mũ:

- Đưa về cùng cơ số.
- Đặt ẩn phụ.
- ....

**Chú ý:** Trong trường hợp cơ số  $a$  có chứa ẩn số thì:

$$a^M > a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) > 0$$

### A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Giải các bất phương trình sau :

a)  $3^{\sqrt{x^2-2x}} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-|x-1|}$

b)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^6-2x^3+1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$

c)  $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$

d)  $3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}-1} - 3^{\sqrt{x}-2} < 11$

e)  $9^{x^2-3x+2} - 6^{x^2-3x+2} < 0$

f)  $6^{2x+3} < 2^{x+7} \cdot 3^{3x-1}$

l)  $2^{x+2} + 5^{x+1} < 2^x + 5^{x+2}$

m)  $2^{x-1} \cdot 3^{x+2} > 36$

**Bài 2.** Giải các bất phương trình sau :

a)  $2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x - 4^x \geq 0$

b)  $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0$

c)  $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52$

d)  $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$

### B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** Tập nghiệm của bất phương trình  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^4$  là:

- A.  $S = (-\infty; 0)$       B.  $S = \left(1; \frac{5}{4}\right)$       C.  $S = (0; 1)$       D.  $S = (2; +\infty)$

**Câu 2:** Giải bất phương trình  $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} > \frac{1}{2}$ . Ta có nghiệm .

- A.  $0 < x < 2$ .      B.  $-1 < x < 2$ .      C.  $0 < x < 1$ .      D.  $1 < x < 2$ .

**Câu 3:** Bất phương trình:  $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{2-x}} \geq \left(\frac{3}{4}\right)^x$  có tập nghiệm là:

- A.  $[1; 2]$       B.  $[-\infty; 2]$       C.  $(0; 1)$       D.  $\emptyset$

**Câu 4:** Số nghiệm nguyên của bất phương trình  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$  là:

- A. 0      B. 1      C. 9      D. 11

**Câu 5:** Tập nghiệm của bất phương trình  $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x^2-15x+13} < 2^{3x-4}$  là:

- A.  $S = \mathbb{R}$       B.  $S = \emptyset$       C.  $S = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$       D.  $S = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$

**Câu 6:** Nếu  $(\sqrt{6} - \sqrt{5})^x > \sqrt{6} + \sqrt{5}$  thì

- A.  $x < 1$       B.  $x > -1$       C.  $x < -1$       D.  $x > 1$

**Câu 7:** Tập nghiệm của bất phương trình  $(2 + \sqrt{3})^{\frac{x-3}{x-1}} < (2 - \sqrt{3})^{\frac{x-1}{x-3}}$  là:

- A.  $\varnothing$       B.  $\mathbb{R}$       C.  $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$       D.  $(1; 3)$

**Câu 8:** Số nghiệm nguyên của bất phương trình  $(\sqrt{10} - 3)^{\frac{3-x}{x-1}} > (\sqrt{10} + 3)^{\frac{x+1}{x+3}}$  là

- A. 1      B. 3      C. 0      D. 2

**Câu 9:** Nghiệm của bất phương trình  $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{1+\sqrt{5}} + 5^{\sqrt{x}}$  là:

A.  $0 \leq x < 1$

B.  $0 < x \leq 1$

C.  $0 < x < 1$

D.  $0 \leq x \leq 1$

**Câu 10:** Tập nghiệm của bất phương trình  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12$  là:

A.  $S = (-\infty; 0)$

B.  $S = (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$

C.  $S = (0; +\infty)$

D.  $S = (-1; 0)$

## VII. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

- Khi giải các bất phương trình logarit ta cần chú ý tính đơn điệu của hàm số logarit.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \\ 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases}$$

- Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình logarit:

- Đưa về cùng cơ số.
- Đặt ẩn phụ.
- ....

**Chú ý:** Trong trường hợp cơ số  $a$  có chứa ẩn số thì:

$$\log_a B > 0 \Leftrightarrow (a-1)(B-1) > 0; \quad \frac{\log_a A}{\log_a B} > 0 \Leftrightarrow (A-1)(B-1) > 0$$

### A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Giải các bất phương trình sau (đưa về cùng cơ số):

a)  $\log_5(1-2x) < 1 + \log_{\sqrt{5}}(x+1)$

b)  $\log_2(1-2\log_9 x) < 1$

c)  $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{5-x} < \log_{\frac{1}{3}}(3-x)$

d)  $\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x > 0$

e)  $\log_{\frac{1}{3}}(\log_2 \frac{1+2x}{1+x}) > 0$

f)  $(x^2 - 4)\log_{\frac{1}{2}} x > 0$

**Bài 2. (\*)** Giải các bất phương trình sau (*đặt ẩn phụ*):

a)  $\log_2 x + 2\log_x 4 - 3 \leq 0$

b)  $\log_5(1-2x) < 1 + \log_{\sqrt{5}}(x+1)$

c)  $2\log_5 x - \log_x 125 < 1$

d)  $\log_{2x} 64 + \log_{x^2} 16 \geq 3$

## B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_2 4x < 3$  là:

A.  $(0; 2)$

B.  $(-\infty; 2)$

C.  $(2; +\infty)$

D.  $(0; +\infty)$

**Câu 2:** Tập nghiệm của bất phương trình  $3 < \log_2 x < 4$  là:

A.  $(0; 16)$

B.  $(8; 16)$

C.  $(8; +\infty)$

D.  $\mathbb{R}$

**Câu 3:** Cho  $\log_{0,2} x > \log_{0,2} y$ . Chọn khẳng định đúng:

A.  $y > x \geq 0$

B.  $x > y > 0$

C.  $x > y \geq 0$

D.  $y > x > 0$

**Câu 4:** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_{0,2}(x-1) > 0$  là

A.  $S = (-\infty; 2)$

B.  $S = (1; 2)$

C.  $S = [1; 2)$

D.  $S = (2; +\infty)$

**Câu 5:** Bất phương trình  $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \leq 2$  là

A.  $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$

B.  $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$

C.  $\left[\frac{3}{4}; 3\right]$

D.  $\left[\frac{3}{4}; 3\right]$

**Câu 6:** Bất phương trình:  $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$  có tập nghiệm là:

A.  $(0; +\infty)$

B.  $\left(1; \frac{6}{5}\right)$

C.  $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$

D.  $(-3; 1)$

**Câu 7:** Bất phương trình:  $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$  có tập nghiệm là:

A.  $(1; 4)$

B.  $(5; +\infty)$

C.  $(-1; 2)$

D.  $(-\infty; 1)$

**Câu 8:** Bất phương trình  $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x > \log_{20} x$  có tập nghiệm là

- A.  $[1; +\infty)$       B.  $(0; 1]$       C.  $(0; 1)$       D.  $(1; +\infty)$

**Câu 9:** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_{0,8}(x^2 + x) < \log_{0,8}(-2x + 4)$  là:

- A.  $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$       B.  $(-4; 1)$       C.  $(-\infty; -4) \cup (1; 2)$       D. Vô nghiệm

**Câu 10:** Nghiệm của bất phương trình  $2\log_3(4x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) \leq 2$  là:

- A.  $x > \frac{4}{3}$       B.  $-\frac{8}{3} \leq x \leq 3$       C.  $\frac{4}{3} < x \leq 3$       D. Vô nghiệm

**Câu 11:** Nghiệm của bất phương trình  $\log_2(x + 1) - 2\log_2(5 - x) < 1 - \log_2(x - 2)$

- A.  $2 < x < 5$       B.  $-4 < x < 3$       C.  $1 < x < 2$       D.  $2 < x < 3$

**Câu 12:** Bất phương trình:  $\log_4(x + 7) > \log_2(x + 1)$  có tập nghiệm là:

- A.  $(-\infty; 1)$       B.  $(-1; 2)$       C.  $(5; +\infty)$       D.  $(1; 4)$

**Câu 13:** Tập nghiệm của bất phương trình:  $\log_3(2x - 1) < -2$

- A.  $\left(-\infty; \frac{5}{8}\right)$       B.  $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right)$       C.  $\left(\frac{5}{8}; +\infty\right)$       D.  $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

**Câu 14:** Tập nghiệm của bất phương trình:  $\log_2(x + 2) - \log_2(x - 2) < 2$

- A.  $(-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$       B.  $(2\sqrt{2}; +\infty)$   
C.  $(2; 2\sqrt{2})$       D.  $(-2\sqrt{2}; -2)$

**Câu 15:** Tập nghiệm của bất phương trình:  $\log(x^2 + 2x - 3) + \log(x + 3) - \log(x - 1) < 0$

- A.  $(-4; -2) \cup (1; +\infty)$       B.  $(-2; 1)$       C.  $(1; +\infty)$       D.  $\emptyset$

**Câu 16:** Giải phương trình:  $\log_3 \frac{3}{x} \cdot \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} < \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$

- A.  $(0; +\infty)$       B.  $\left(0; \frac{\sqrt{3}}{8}\right) \cup (1; +\infty)$       C.  $\left(\frac{\sqrt{3}}{8}; 1\right)$       D.  $(0; 1)$

**Câu 17:** Tập nghiệm của bất phương trình:  $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2) \geq -1$

- A.  $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$       B.  $(0; 1)$       C.  $(2; +\infty)$       D.  $[0; 1) \cup (2; 3]$

**Câu 18:** Tập nghiệm của bất phương trình:  $\log_3 \frac{3x-5}{x+1} < 1$

- A.  $(-\infty; -1)$       B.  $(-1; +\infty)$       C.  $\left(-1; \frac{5}{3}\right)$       D.  $\left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$

**Câu 19:** Tập nghiệm của bất phương trình:  $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) < 2$  là:

- A.  $\left(-\infty; -\frac{3}{8}\right)$       B.  $(3; +\infty)$       C.  $\left(\frac{3}{4}; 3\right)$       D.  $(4; +\infty)$

**Câu 20:** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_{0,2}(x+1) > \log_{0,2}(3-x)$  là:

- A.  $S = (-1; 1)$       B.  $S = (1; +\infty)$       C.  $S = (1; 3)$       D.  $S = (1; 3]$

## IX. ÔN TẬP HÀM SỐ

### LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

#### A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1:** Giải các phương trình sau:

a)  $4^{x^2+2} - 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0$

b)  $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$

c)  $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$

d)  $64^{\frac{1}{x}} - 2^{3+\frac{3}{x}} + 12 = 0$

**Bài 2:** Giải các bất phương trình sau:

a)  $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}} < \frac{25}{4}$

b)  $\frac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1} < 2$

c)  $x^2 \cdot 5^x - 5^{2+x} < 0$

d)  $x^{\lg^2 x - 3 \lg x + 1} > 1000$

**Bài 3:** Giải các bất phương trình sau:

a)  $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$

b)  $25^{-x} - 5^{-x+1} \geq 50$

c)  $9.4^{\frac{1}{x}} + 5.6^{\frac{1}{x}} < 4.9^{\frac{1}{x}}$

d)  $3^{\lg x + 2} < 3^{\lg x^2 + 5} - 2$

**Bài 4:** Giải các phương trình sau:

a)  $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$

b)  $\log_{5-x}(x^2 - 2x + 65) = 2$

c)  $\log_7(2^x - 1) + \log_7(2^x - 7) = 1$

d)  $\log_3(1 + \log_3(2^x - 7)) = 1$

**Bài 5:** Giải các phương trình sau:

a)  $2(\log_x \sqrt{5})^2 - 3 \log_x \sqrt{5} + 1 = 0$

b)  $\log_{1/3} x - 3\sqrt{\log_{1/3} x} + 2 = 0$

c)  $\log_2^2 x + 2 \log_2 \sqrt{x} - 2 = 0$

d)  $3 + 2 \log_{x+1} 3 = 2 \log_3(x+1)$

**Bài 6\*:** Giải các bất phương trình sau:

a)  $\log_{0.5}(x^2 - 5x + 6) > -1$

b)  $\log_7 \frac{2x-6}{2x-1} > 0$

c)  $|\log_3 x| - \log_3 x - 3 < 0$

d)  $\log_{1/3} \frac{2-3x}{x} \geq -1$

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****Câu 1 :** Rút gọn biểu thức  $I = \frac{(x^{\sqrt{5}-1})^{\sqrt{5}+1}}{x^{\sqrt{5}-1} \cdot x^{3-\sqrt{5}}}$  (với  $x > 0$ ) ta được :

A.  $I = x$

B.  $I = x^2$

C.  $I = x^3$

D.  $I = x^4$

**Câu 2 :** Rút gọn biểu thức :  $J = \frac{a^{\frac{2}{3}} \left( a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{4}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left( a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{4}} \right)}$  (với  $a > 0$ ) ta được :

A.  $J = a$

B.  $J = a^2$

C.  $J = a^3$

D.  $J = a^4$

**Câu 3 :** Tính giá trị của biểu thức  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{a}} \right)^{\log \sqrt{a}^{2 - \log_{2016} 1}}$  ta được :

A.  $P = 2$

B.  $P = \frac{1}{2}$

C.  $P = -2$

D.  $P = -\frac{1}{2}$

**Câu 4:** Cho  $\alpha = \log_2 5 + 3 \log_8 25$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = 2^\alpha$  ta được :

A.  $P = 125$

B.  $P = 215$

C.  $P = 512$

D.  $P = 152$

**Câu 5 :** Nếu  $a^{\frac{\sqrt{5}}{5}} > a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$  và  $\log_b \frac{4}{5} < \log_b \frac{5}{6}$  thì

A.  $0 < a < 1, b > 1$

B.  $0 < a < 1, 0 < b < 1$

C.  $a > 1, b > 1$

D.  $a > 1, 0 < b < 1$

**Câu 6 :** Tập xác định của hàm số  $y = (1-x)^{\frac{1}{3}}$  là

A.  $(-\infty; 1)$

B.  $(1; +\infty)$

C.  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

D.  $[1; +\infty)$

**Câu 7:** Tập xác định của hàm số  $y = \log_2(2x^2 - x - 3)$  là

A.  $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (1; +\infty)$

B.  $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

C.  $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$

D.  $\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$

**Câu 8 :** Hàm số  $y = e^{-x}$

A. Đồng biến trong khoảng  $(-\infty; 0)$

B. Đồng biến trong khoảng  $(-\infty; +\infty)$

C. Nghịch biến trong khoảng  $(-\infty; +\infty)$ D. Nghịch biến trong khoảng  $(0; +\infty)$ 

**Câu 9 :** Hàm số  $y = \log_{a^2-2a+1} x$  nghịch biến trong khoảng  $(0; +\infty)$  khi :

A.  $a \neq 1$  và  $0 < a < 2$ B.  $a > 1$ C.  $a < 0$ D.  $a \neq 1$  và  $a > \frac{1}{2}$ 

**Câu 10 :** Đạo hàm của hàm số  $y = x(\ln x - 1)$  là :

A.  $\ln x - 1$ B.  $\ln x$ C.  $\frac{1}{x} - 1$ 

D. 1

**Câu 11 :** Cho hàm số  $f(x) = 3^x - 2$ . Chọn các khẳng định đúng trong các khẳng định sau :

A.  $f'(0) = \ln 3$ B.  $f'(0) = 3\ln 3$ C.  $f'(1) = \ln 3$ D.  $f'(2) = 9$ 

**Câu 12 :** Cho hàm số  $f(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$ , giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập xác định là :

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

**Câu 13 :** Tập nghiệm của phương trình  $2^{2x^2-7x+5} = 1$  là

A.  $\{1; 5\}$ B.  $\left\{1; \frac{5}{2}\right\}$ C.  $\left\{\frac{2}{5}; 1\right\}$ D.  $\emptyset$ 

**Câu 14 :** Tập nghiệm của phương trình  $\log_{\sqrt{2}}(5x^2 - 21) = 1$  là :

A.  $\left\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right\}$ B.  $\{-5; 5\}$ C.  $\{-\log_2 5; \log_2 5\}$ D.  $\emptyset$ 

**Câu 15 :** Nghiệm của phương trình  $\log_4(\log_2 x) = 1$  là :

A.  $x = 16$ B.  $x = 8$ C.  $x = 4$ D.  $x = 2$ 

**Câu 16 :** Nghiệm của phương trình  $3^x \cdot 2^{x+1} - 72 = 0$  là :

A.  $x = 2$ B.  $x = \log_6 72$ C.  $x = 4$ D.  $x = 8$ 

**Câu 17:** Tập nghiệm của phương trình  $3^{|4x-4|} = 81^{x-1}$  là :

A.  $[1; +\infty)$ B.  $\{1\}$ C.  $(1; +\infty)$ D.  $\emptyset$

**Câu 18:** Nghiệm của phương trình  $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$  là :

- A.  $x = 2$                       B.  $x = 3$                       C.  $x = \frac{1}{2}$                       D.  $x = \frac{1}{3}$

**Câu 19 :** Nghiệm của phương trình  $\log_3 x + \log_2 (x+2) = 1$  là :

- A.  $x = 1$                       B.  $x = 2$                       C.  $x = 3$                       D.  $x = 4$

**Câu 20 :** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_2 x + \log_3 x = \log_2 x \cdot \log_3 x$  là :

- A.  $\{1; 6\}$                       B.  $\{1; 3\}$                       C.  $\{2; \log_3 2\}$                       D.  $\{2; 4\}$

**Câu 21 :** Tập nghiệm của bất phương trình  $(\sqrt{2})^{x-2} > 2^{x+3}$  là :

- A.  $(-\infty; 0)$                       B.  $(-\infty; -8)$                       C.  $(1; +\infty)$                       D.  $(6; +\infty)$

**Câu 22 :** Tập nghiệm của bất phương trình  $5^{\log_3 \left( \frac{x-2}{x} \right)} < 1$  là :

- A.  $(2; +\infty)$                       B.  $(-\infty; 0)$                       C.  $(0; 2)$                       D.  $(0; +\infty)$

**Câu 23 :** Tập nghiệm của bất phương trình  $2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x-1}$  là :

- A.  $[2; +\infty)$                       B.  $(-\infty; 2]$                       C.  $(2; +\infty)$                       D.  $\mathbb{R}$

**Câu 24 :** Theo tổng cục thống kê, năm 2003 Việt Nam có 80 902 400 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,47%. Nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi thì năm 2016 Việt Nam sẽ có số người khoảng (chọn đáp án gần đúng nhất) :

- A. 97 938 868                      B. 96 247 183                      C. 95 992 878                      D. 94 432 113

**Câu 25:** Một người gửi số tiền 1 tỷ đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6% năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm thì số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu. Nếu không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi thì sau 5 năm người đó nhận được số tiền là (kết quả làm tròn đến hàng năm).

- A. 1 276 281 600      B. 1 350 738 000      C. 1 298 765 500      D. 1 199 538 800

**Câu 26:** Đạo hàm của hàm số  $f(x) = \log_2 (2x^3 + 1)$  là :

A.  $f'(x) = \frac{4x}{(2x^2+1)\ln 2}$

B. Kết quả khác

C.  $f'(x) = \frac{1}{(2x^2+1)\ln 2}$

D.  $f'(x) = \frac{4x}{(2x^2+1)\ln 2}$

Câu 27 : Nếu  $a^{\frac{17}{3}} < a^{\frac{15}{8}}$  và  $\log_b(\sqrt{2} + \sqrt{5}) < \log_b(\sqrt{2} + \sqrt{3})$  thì

A.  $a > 1, 0 < b < 1$

B.  $0 < a < 1, b > 1$

C.  $a > 1, b > 1$

D.  $0 < a < 1, 0 < b < 1$

Câu 28 : Giá trị của  $\log_{a^3} a$  ( $a > 0$  và  $a \neq 1$ ) bằng :

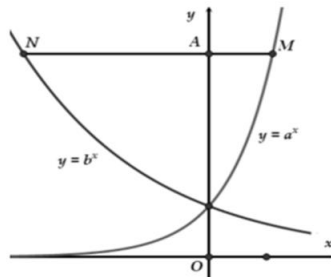
A.  $\frac{1}{3}$

B. 3

C. -3

D.  $-\frac{1}{3}$

Câu 29 : Cho hai số thực dương  $a, b$  khác 1. Biết rằng bất kì đường thẳng nào song song với trục hoành mà cắt các đường  $y = a^x, y = b^x$  và trục tung lần lượt tại  $M, N, A$  thỏa mãn  $AN = 3AM$ . Tìm khẳng định đúng ?



A.  $ab^3 = 1$

B.  $ab^2 = 1$

C.  $b = 3a$

D.  $a^3b = 1$

Câu 30 : (THPT QG 2017 Câu 46 – Mã 102) Cho  $a > 0, b > 0$  thỏa  $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$ .

Giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức  $P = a + 2b$

A.  $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-3}{2}$

B.  $P_{\min} = \frac{3\sqrt{10}-7}{2}$

C.  $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-1}{2}$

D.  $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-5}{2}$

## CHƯƠNG III

### NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

## I. NGUYÊN HÀM

### 1. Khái niệm nguyên hàm

- Cho hàm số  $f$  xác định trên  $K$ . Hàm số  $F$  được gọi là **nguyên hàm** của  $f$  trên  $K$  nếu:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in K$$

- Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $K$  thì **họ nguyên hàm** của  $f(x)$  trên  $K$  là:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

- Mọi hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $K$  đều có nguyên hàm trên  $K$ .

### 2. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

|                                                                            |                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| 1) $\int dx = x + C$                                                       | 6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1)$ |
| 2) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$ | 7) $\int \cos x dx = \sin x + C$                        |
| 3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$                                      | 8) $\int \sin x dx = -\cos x + C$                       |
| 4) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$                            | 9) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$            |
| 5) $\int e^x dx = e^x + C$                                                 | 10) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$          |
| <b>Công thức mở rộng</b>                                                   |                                                         |

|                                                                                                  |                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| 1) $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$ | 8) $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C (a \neq 0)$    |
| 2) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b  + C$                                          | 9) $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C (a \neq 0)$   |
| 3) $\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + C$                                 | 10) $\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b)  + C$        |
| 4) $\int k^{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{(ax+b)}}{\ln k} + C (0 < k \neq 1)$                | 11) $\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b)  + C$         |
| 5) $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C (a \neq 0)$                                      | 12) $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$  |
| 6) $\int \tan x dx = -\ln \cos x  + C$                                                           | 13) $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$ |
| 7) $\int \cot x dx = \ln \sin x  + C$                                                            |                                                                    |

**3. Tính chất**

- $\int f'(x) dx = f(x) + C$
- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \neq 0)$

**4. Phương pháp tính nguyên hàm****a) Phương pháp đổi biến số**

Nếu  $\int f(u) du = F(u) + C$  và  $u = u(x)$  có đạo hàm liên tục thì:

$$\int f[u(x)] \cdot u'(x) dx = F[u(x)] + C$$

**b) Phương pháp tính nguyên hàm từng phần**

Nếu  $u, v$  là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên  $K$  thì:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

**VẤN ĐỀ 1: Tính nguyên hàm bằng cách sử dụng bảng nguyên hàm**

*Biến đổi biểu thức hàm số để sử dụng được bảng các nguyên hàm cơ bản.*

**Chú ý:** Để sử dụng phương pháp này cần phải:

- Nhớ vững bảng các nguyên hàm.
- Nhớ vững phép tính vi phân.

**Ví dụ 1.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$  .....

.....

**Ví dụ 2.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$  .....

.....

**Ví dụ 3.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$  .....

.....

**Ví dụ 4.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$  .....

.....

**Ví dụ 5.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x \left( 2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$  .....

.....

.....  
**Ví dụ 6.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2 \sin 3x \cos 2x$  .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....

**Ví dụ 7.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (2x - 3)^7$  .....

.....  
 .....  
 .....

**Ví dụ 8.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{3x+1}$  .....

.....  
 .....

**Ví dụ 9.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $\int \frac{dx}{(3-2x)^5}$  .....

.....  
 .....

**Ví dụ 10.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ , biết  $F(1) = \frac{3}{2}$  .....

.....  
 .....  
 .....

### A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a)  $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

b)  $f(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x^2}$

c)  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$

d)  $f(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

e)  $f(x) = \tan^2 x$

f)  $f(x) = \cos^2 x$

g)  $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

h)  $f(x) = e^x (e^x - 1)$

**Bài 2.** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a)  $f(x) = (3x - 5)^6$

b)  $f(x) = \frac{3}{5x - 2}$

c)  $f(x) = e^{2x+1}$

**Bài 3.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x)$  thoả điều kiện cho trước:

a)  $f(x) = x^3 - 4x + 5; \quad F(1) = 3$

b)  $f(x) = 3 - 5\cos x; \quad F(\pi) = 2$

c)  $f(x) = \frac{3 - 5x^2}{x}; \quad F(e) = 1$

### B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** Nguyên hàm của  $2x(1 + 3x^3)$  là:

A.  $x^2(x + x^3) + C$

B.  $x^2(1 + 3x^2) + C$

C.  $2x(x + x^3) + C$

D.  $x^2\left(1 + \frac{6x^3}{5}\right) + C$

**Câu 2:** Nguyên hàm của  $\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$  là:

A.  $-\frac{x^4 + x^2 + 3}{3x} + C$

B.  $-\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + C$

C.  $\frac{-x^4 + x^2 + 3}{3x} + C$

D.  $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} + C$

**Câu 3:** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  là:

A.  $F(x) = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{4} + C$

B.  $F(x) = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C$

C.  $F(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x}} + C$

D.  $F(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}} + C$

**Câu 4:** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$  là:

A.  $F(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + C$

B.  $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$

C.  $F(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + C$

D.  $F(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2} + C$

**Câu 5:**  $\int \left(\frac{5}{x} + \sqrt{x^3}\right) dx$  bằng:

A.  $5\ln|x| - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

B.  $-5\ln|x| + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

C.  $-5\ln|x| - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

D.  $5\ln|x| + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

**Câu 6:** Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $y = \frac{1}{x-1}$  và  $F(2) = 1$  thì  $F(3)$  bằng

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\ln \frac{3}{2}$

C.  $\ln 2$

D.  $\ln 2 + 1$

**Câu 7:** Tìm 1 nguyên hàm  $F(x)$  của  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$  biết  $F(1) = 0$

A.  $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$

B.  $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}$

C.  $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

D.  $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}$

**Câu 8:** Một nguyên hàm của hàm số:  $y = \cos 5x$ .  $\cos x$  là:

A.  $F(x) = \cos 6x$

B.  $F(x) = \sin 6x$

C.  $-\frac{1}{2} \left( \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4} \right)$

D.  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 4x \right)$

**Câu 9:** Tính  $\int \cos 5x \cdot \cos 3x dx$

A.  $\frac{1}{8} \sin 8x + \frac{1}{2} \sin 2x + C$

B.  $\frac{1}{2} \sin 8x + \frac{1}{2} \sin 2x$

C.  $\frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{4} \sin 2x$

D.  $\frac{-1}{16} \sin 8x - \frac{1}{4} \sin 2x$

**Câu 10:** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos^2 x$  là:

A.  $\frac{x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$

B.  $\frac{x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} + C$

C.  $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$

D.  $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$

**Câu 11:** Tính:  $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

A.  $2 \tan \frac{x}{2} + C$

B.  $\tan \frac{x}{2} + C$

C.  $\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + C$

D.  $\frac{1}{4} \tan \frac{x}{2} + C$

**Câu 12:** Cho  $f'(x) = 3 - 5\sin x$  và  $f(0) = 7$ . Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A.  $f(x) = 3x + 5\cos x + 2$

B.  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$

C.  $f(\pi) = 3\pi$

D.  $f(x) = 3x - 5\cos x$

**Câu 13: (đề Minh họa -2016)** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{2x-1}$

A.  $\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$

B.  $\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$

C.  $-\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$

D.  $\frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$

**Câu 14.** Tìm  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-1}}$  biết  $F(1) = 3$

A.  $2\sqrt{2x-1}$

B.  $\sqrt{2x-1} + 2$

C.  $2\sqrt{2x-1} + 1$

D.  $2\sqrt{2x-1} - 1$

**VẤN ĐỀ 2: Tính nguyên hàm  $\int f(x)dx$  bằng phương pháp đổi biến số**

Nếu  $f(x)$  có dạng:  $f(x) = g[u(x)] \cdot u'(x)$  thì ta đặt  $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$ .

Khi đó:  $\int f(x)dx = \int g(t)dt$ , trong đó  $\int g(t)dt$  dễ dàng tìm được.

**Chú ý:** Sau khi tính  $\int g(t)dt$  theo  $t$ , ta phải thay lại  $t = u(x)$ .

**Một số cách đổi biến thường dùng**

Tính  $I = \int f(x^n) x^{n-1} dx$  Đặt  $u = x^n$

Tính  $I = \int f(\sqrt{x}) \sqrt{x} dx$  Đặt  $u = \sqrt{x}$

Tính  $I = \int \frac{f(\ln x)}{x} dx$  Đặt  $u = \ln x$

Tính  $I = \int f(e^x) e^x dx$  Đặt  $u = e^x$

**Ví dụ 10.** Tìm nguyên hàm  $\int (x^3 + 5)^4 x^2 dx$  .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 11.** Tìm nguyên hàm  $\int \frac{x}{x^2 + 5} dx$  .....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 13.** Tìm nguyên hàm  $\int \frac{\ln x}{(1 + \ln x)x} dx$  .....

a)  $\int (2x^2 + 1)^7 x dx$       b)  $\int \sqrt{x^2 + 1} . x dx$       c)  $\int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx$

d)  $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 3}}$

e)  $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****Câu 1:**  $\int 3x(2x^2 + 1)^7 dx$ , bằng:

**A.**  $I = \frac{3}{28}(2x^2 + 1)^8 + C.$

**B.**  $I = \frac{3}{16}(2x^2 + 1)^8 + C.$

**C.**  $I = \frac{3}{32}(2x^2 + 1)^8 + C.$

**D.**  $I = \frac{3}{64}(2x^2 + 1)^8 + C.$

**Câu 2.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ 

**A.**  $\ln|x+1| + x + 1 + C$

**B.**  $\ln|x+1| + C$

**C.**  $\frac{1}{x+1} + C$

**D.**  $\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$

**Câu 3.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x(1-x^2)^{10}$ 

**A.**  $\frac{(1-x^2)^{11}}{22} + C$

**B.**  $-20x(1-x^2)^9 + C$

**C.**  $-\frac{(1-x^2)^{10}}{11} + C$

**D.**  $-\frac{(1-x^2)^{11}}{22} + C$

**Câu 4.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \left(\frac{x}{x^3+1}\right)^2$ 

**A.**  $\frac{1}{3}\ln|x^3+1| + C$

**B.**  $-\frac{1}{3(x^3+1)} + C$

**C.**  $\frac{3}{(x^3+1)} + C$

**D.**  $\frac{1}{3(x^2+1)} + C$

**Câu 5:**  $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$  bằng:

**A.**  $\frac{3}{2}\sqrt{(\ln x)^3} + C$

**B.**  $2\sqrt{(\ln x)^3} + C$

**C.**  $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + C$

**D.**  $3\sqrt{(\ln x)^3} + C$

**Câu 6.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x \ln^5 x}$ 

**A.**  $-\frac{4}{\ln^4 x} + C$

**B.**  $\frac{1}{4 \ln^4 x} + C$

**C.**  $4 \ln^4 x + C$

**D.**  $-\frac{1}{4 \ln^4 x} + C$

**Câu 7:**  $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} dx$  bằng:

- A.  $\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+2}+C$       B.  $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}+C$       C.  $\sqrt{2x^2+3}+C$       D.  $2\sqrt{2x^2+3}+C$

**Câu 8:** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+5}}$ :

- A.  $\frac{1}{2}\sqrt{x^4+5}+C$       B.  $\frac{1}{4}\sqrt{x^4+5}+C$       C.  $\frac{1}{4\sqrt{x^4+5}}+C$       D.  $\frac{1}{8\sqrt{x^4+5}}+C$

**Câu 9:**  $\int x.e^{x^2+1} dx$  bằng:

- A.  $\frac{1}{2}e^{x^2+1}+C$       B.  $e^{x^2+1}+C$       C.  $2e^{x^2+1}+C$       D.  $x^2.e^{x^2+1}+C$

**Câu 10:**  $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$ , bằng:

- A.  $I = e^x + C$       B.  $I = \ln(e^x + 1) + C$   
C.  $I = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + C$       D.  $I = \ln(e^x + 1)$

**VẤN ĐỀ 3: Tính nguyên hàm bằng phương pháp tính nguyên hàm từng phần**

Với  $P(x)$  là đa thức của  $x$ , ta thường gặp các dạng sau:

|      |                    |                       |                       |                      |
|------|--------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|
|      | $\int P(x).e^x dx$ | $\int P(x).\cos x dx$ | $\int P(x).\sin x dx$ | $\int P(x).\ln x dx$ |
| $u$  | $P(x)$             | $P(x)$                | $P(x)$                | $\ln x$              |
| $dv$ | $e^x dx$           | $\cos x dx$           | $\sin x dx$           | $P(x)$               |

**Ví dụ 14.** Tìm nguyên hàm  $\int \ln x dx$  .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 15.** Tìm nguyên hàm  $\int x.e^x dx$  .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 16.** Tìm nguyên hàm  $\int x \cos x dx$  .....

.....

Ví dụ 17. Tìm nguyên hàm  $\int \cos \sqrt{x} dx$  .....

### A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Tính các nguyên hàm sau:

a)  $\int x \cdot \sin x dx$

b)  $\int x \sin 2x dx$

c)  $\int (x^2 + 5) \sin x dx$

d)  $\int (x^2 + 2x + 3) \cos x dx$

e)  $\int x^3 e^{x^2} dx$

f)  $\int x \cos 2x dx$

g)  $\int x \ln x dx$

h)  $\int \ln^2 x dx$

i)  $\int \ln(x^2 + 1) dx$

**Bài 2.** Tính các nguyên hàm sau:

a)  $\int e^{\sqrt{x}} dx$

b)  $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$

c)  $\int \sin \sqrt{x} dx$

d)  $\int x \cdot \sin \sqrt{x} dx$

e)  $\int \sin \sqrt[3]{x} dx$

f)  $\int \cos(\ln x) dx$

g)  $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$

h)  $\int \sin(\ln x) dx$

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**Câu 1:**  $\int x e^{\frac{x}{3}} dx$  bằng:

- A.  $3(x-3)e^{\frac{x}{3}} + C$       B.  $(x+3)e^{\frac{x}{3}} + C$       C.  $\frac{1}{3}(x-3)e^{\frac{x}{3}} + C$       D.  $\frac{1}{3}(x+3)e^{\frac{x}{3}} + C$

**Câu 2:**  $\int x \ln x dx$  bằng:

- A.  $\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C$       B.  $\frac{x^2}{4} \cdot \ln x - \frac{x^2}{2} + C$   
C.  $-\frac{x^2 \ln x}{4} + \frac{x^2}{2} + C$       D.  $\frac{x^2}{2} \cdot \ln x + \frac{x^2}{4} + C$

**Câu 3.**  $\int 2x \cos 2x dx$  bằng:

- A.  $F(x) = x \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + C.$       B.  $F(x) = -x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + C.$   
C.  $F(x) = -x \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + C.$       D.  $F(x) = x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + C.$

**Câu 4.**  $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$  bằng:

- A.  $F(x) = \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$       B.  $F(x) = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + C.$   
C.  $F(x) = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$       D.  $F(x) = \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + C.$

**Câu 5.**  $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$  bằng:

- A.  $-x \cot x + \ln |\sin x| + C$       B.  $-x \cot x - \ln |\sin x| + C$   
C.  $x \cot x + \ln |\cos x| + C$       D.  $x \cot x - \ln |\cos x| + C$

**VẤN ĐỀ 4: Tính nguyên hàm của một số hàm số thường gặp**

**1.  $f(x)$  là hàm hữu tỉ:**  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

– Nếu bậc của  $P(x) \geq$  bậc của  $Q(x)$  thì ta thực hiện phép chia đa thức.

– Nếu bậc của  $P(x) <$  bậc của  $Q(x)$  và  $Q(x)$  có dạng tích nhiều nhân tử thì ta phân tích  $f(x)$  thành tổng của nhiều phân thức (bằng phương pháp hệ số bất định).

Chẳng hạn: 
$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

$$\frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}, \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

$$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}$$

**2.  $f(x)$  là hàm vô tỉ**

$$+ f(x) = R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \rightarrow \text{đặt } t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$+ f(x) = R\left(\frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}\right) \rightarrow \text{đặt } t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$$

**3.  $f(x)$  là hàm lượng giác**

Ta sử dụng các phép biến đổi lượng giác thích hợp để đưa về các nguyên hàm cơ bản. Chẳng hạn:

+ Nếu  $f(x) = R(\cos x) \cdot \sin x$  thì đặt  $t = \cos x$

+ Nếu  $f(x) = R(\sin x) \cdot \cos x$  thì đặt  $t = \sin x$

+ Nếu  $f(x) = R(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$  thì đặt  $t = \tan x$

+ Nếu  $f(x) = R(\cot x) \cdot \frac{1}{\sin^2 x}$  thì đặt  $t = \cot x$

**Ví dụ 18.** Tìm nguyên hàm  $\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}$  .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....

**Ví dụ 19.** Tìm nguyên hàm  $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx$  .....

**Ví dụ 20.** Tìm nguyên hàm  $\int \frac{\tan x dx}{\cos^2 x}$  .....

**A. BÀI TẬP TỰ LUẬN****Bài 1.** Tính các nguyên hàm sau:

a)  $\int \frac{dx}{x(x+1)}$

b)  $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$

c)  $\int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx$

d)  $\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)} dx$

e)  $\int \frac{dx}{x^2-6x+9}$

f)  $\int \frac{dx}{x^2-4}$

**Bài 2.** Tính các nguyên hàm sau:

a)  $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx$

b)  $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$

**Bài 3.** Tính các nguyên hàm sau:

a)  $\int \sin^4 x \cos x dx$

b)  $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$

c)  $\int \frac{dx}{\cos x}$

d)  $\int \sin 2x \sin 5x dx$

e)  $\int \cos x \sin 3x dx$

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****Câu 1:**  $\int \frac{3x-1}{x+2} dx$  bằng:

A.  $3x + 7 \ln|x+2| + C$

B.  $3x - \ln|x+2| + C$

C.  $3x + \ln|x+2| + C$

D.  $3x - 7 \ln|x+2| + C$

**Câu 2:**  $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$  bằng:

A.  $\ln|x+1| + \ln|x+2| + C$

B.  $\ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C$

C.  $\ln|x+1| + C$

D.  $\ln|x+2| + C$

**Câu 3:**  $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx$  bằng:

A.  $3 \ln|x-2| - 2 \ln|x-1| + C$

B.  $3 \ln|x-2| + 2 \ln|x-1| + C$

C.  $2\ln|x-2|-3\ln|x-1|+C$

D.  $2\ln|x-2|+3\ln|x-1|+C$

**Câu 4:**  $\int \frac{1}{x^2-4x-5} dx$  bằng:

A.  $\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+C$

B.  $6\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+C$

C.  $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+C$

D.  $-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+C$

**Câu 5.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos^2 x \cdot \sin x$

A.  $\frac{1}{3}\cos^3 x + C$

B.  $-\cos^3 x + C$

C.  $-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$

D.  $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$

**Câu 6.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \tan 2x$

A.  $2\ln|\cos 2x|+C$

B.  $\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$

C.  $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$

D.  $\frac{1}{2}\ln|\sin 2x|+C$

**Câu 7.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sin^5 x \cdot \cos x$

A.  $\frac{\sin^6 x}{6} + C$

B.  $-\frac{\sin^6 x}{6} + C$

C.  $-\frac{\cos^6 x}{6} + C$

D.  $\frac{\cos^6 x}{6} + C$

**Câu 8.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$

A.  $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

B.  $-\frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

C.  $\sin^3 x - \sin^5 x + C$

D. Đáp án khác.

**Câu 9.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$  là

A.  $F(x) = -\cos x - \sin x + C$

B.  $F(x) = \cos x + \sin x + C$

C.  $F(x) = \cos x - \sin x + C$

D.  $F(x) = -\cos x + \sin x + C$

**Câu 10.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

**A.**  $\ln|\sin x - \cos x| + C$

**B.**  $-\ln|\sin x - \cos x| + C$

**C.**  $\ln|\sin x + \cos x| + C$

**D.**  $-\ln|\sin x + \cos x| + C$

**Câu 11.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}$  là

**A.**  $F(x) = \frac{1}{6} \cdot \tan^6 x + C.$

**B.**  $F(x) = \frac{1}{5} \cdot \tan^6 x + C.$

**C.**  $F(x) = \frac{1}{6} \cdot \tan^5 x + C.$

**D.**  $F(x) = \frac{1}{6} \cdot \tan^5 x + C.$

**Câu 12.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$  là

**A.**  $F(x) = \sqrt{2} \ln|1 - \tan x| + C.$

**B.**  $F(x) = -\sqrt{2} \ln|1 - \tan x| + C.$

**C.**  $F(x) = \ln|1 - \tan x| + C.$

**D.**  $F(x) = -\sqrt{3} \ln|1 - \tan x| + C.$

# HÌNH HỌC

## CHƯƠNG I: KHỐI ĐA DIỆN

### ÔN TẬP KIẾN THỨC CŨ

**1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông :** cho  $\triangle ABC$  vuông ở A ta có :

a) Định lý Pitago :  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

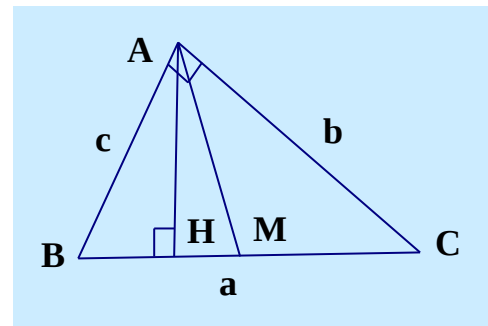
b)  $BA^2 = BH.BC$ ;  $CA^2 = CH.CB$

c)  $AB.AC = BC.AH$  ;  $AH^2 = BH.HC$

d)  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

e)  $BC = 2AM$

f)  $\sin B = \frac{b}{a}$ ,  $\cos B = \frac{c}{a}$ ,  $\tan B = \frac{b}{c}$ ,  $\cot B = \frac{c}{b}$



**2. Hệ thức lượng trong tam giác thường:**

\* Định lý hàm số Côsin:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

\* Định lý hàm số Sin:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

**3. Các công thức tính diện tích.**

**a. Công thức tính diện tích tam giác**

|                            |                              |                                                                 |
|----------------------------|------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| 1) $S = \frac{1}{2}.a.h_a$ | 2) $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ | 3) $S = \frac{a.b.c}{4R}$ ( R : bán kính đường tròn ngoại tiếp) |
|----------------------------|------------------------------|-----------------------------------------------------------------|

4)  $S = p.r$  ( r : bán kính đường tròn nội tiếp và  $p = \frac{a+b+c}{2}$  )

|                                                                                                 |                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 5) $S = \sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Công thức Hê – Rông)                                         |                                                                                     |
| <b>Đặc biệt :</b>                                                                               |                                                                                     |
| $\Delta ABC$ vuông ở A : $S = \frac{1}{2} AB.AC$                                                | $\Delta ABC$ đều cạnh $a$ : $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$                            |
| Đường cao tam giác đều cạnh $a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$                                           | Đường chéo hình vuông cạnh $a = a\sqrt{2}$                                          |
| Đường cao tứ diện đều cạnh $a = \frac{a\sqrt{6}}{3}$                                            | Đường chéo hình lập phương cạnh $a = a\sqrt{3}$                                     |
|                                                                                                 | Đường chéo hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c bằng: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ |
| <b>b/ <u>Diện tích hình vuông:</u></b><br><br>S = cạnh x cạnh                                   | <b>c/ <u>Diện tích hình chữ nhật:</u></b><br><br>S = dài x rộng                     |
| <b>d/ <u>Diện tích hình thoi:</u></b><br><br>$S = \frac{1}{2}$ tích 2 đường chéo                | <b>e/ <u>Diện tích hình bình hành:</u></b><br><br>S = đáy x chiều cao               |
| <b>f/ <u>Diện tích hình thang:</u></b><br><br>$S = \frac{1}{2}$ (đáy lớn + đáy nhỏ) x chiều cao | <b>g/ <u>Diện tích hình tròn :</u></b><br><br>$S = \pi.R^2$                         |

**BÀI 1-2 :**
**KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN**  
**KHỐI ĐA DIỆN LỖI - KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU**
**A.TÓM TẮT LÝ THUYẾT****1/ Khối đa diện**

Hình đa diện (gọi tắt là đa diện)  $(H)$  là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất sau.

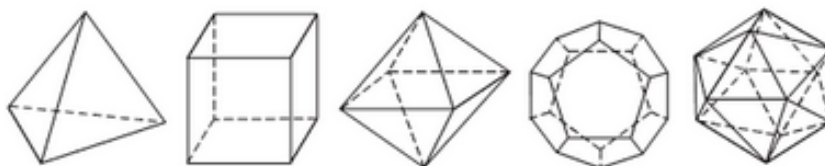
a) Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.

b) Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

**2/ Khối đa diện lỗi:** Khối đa diện  $(H)$  được gọi là khối đa diện lỗi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của  $(H)$  luôn thuộc  $(H)$ . Khi đó đa diện giới hạn  $(H)$  được gọi là *đa diện lỗi*

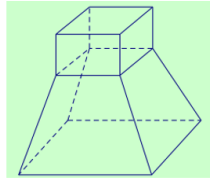
**3/ Khối đa diện đều.** Cho khối đa diện đều  $\{p; q\}$ , chỉ số  $p$  là số cạnh của mỗi mặt và  $q$  là số mặt ở mỗi đỉnh.

| Tên đa diện  | Loại      | Số đỉnh | Số cạnh | Số mặt | Số mặt đ.xúng | Số trục đ.xúng |
|--------------|-----------|---------|---------|--------|---------------|----------------|
| Tứ diện đều  | $\{3;3\}$ | 4       | 6       | 4      | 6             | 3              |
| H.lập phương | $\{4;3\}$ | 8       | 12      | 6      | 9             | 9              |
| Bát diện đều | $\{3;4\}$ | 6       | 12      | 8      | 9             |                |
| 12 mặt đều   | $\{5;3\}$ | 20      | 30      | 12     | 15            |                |
| 20 mặt đều   | $\{3;5\}$ | 12      | 30      | 20     | 15            |                |

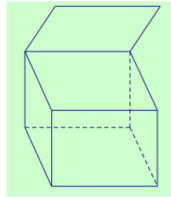


Gọi  $D$ ,  $C$ ,  $M$  là số đỉnh, số cạnh, số mặt của khối đa diện đều, ta có:

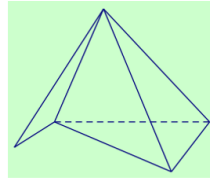
$$M \cdot p = 2C = qD, \quad D + M = 2 + C$$

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****Câu 1.** Cho các hình khối sau

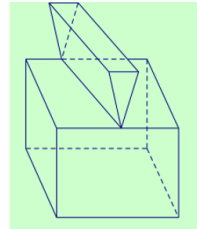
Hình 1



Hình 2

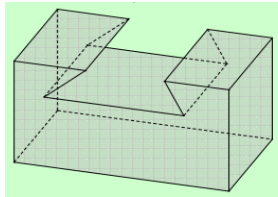
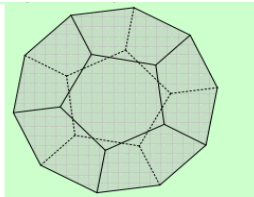
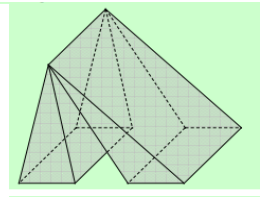
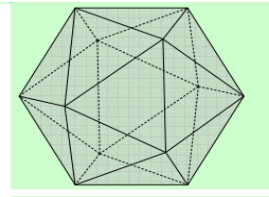
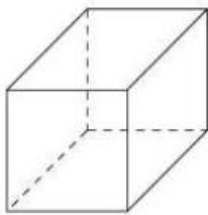


Hình 3

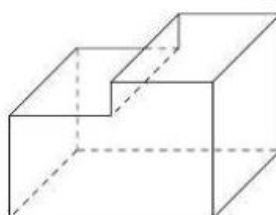


Hình 4

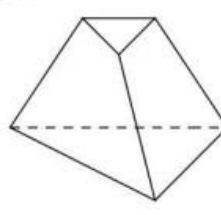
Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), hình đa diện là :

**A.** Hình 1**B.** Hình 2.**C.** Hình3.**D.** Hình 4.**Câu 2.** Vật thể nào trong các vật thể sau không phải là khối đa diện ?**A.****B.****C.****D****Câu 4:** Mỗi hình sau gồm một số hữu hạn đa giác phẳng, tìm hình không là hình đa diện

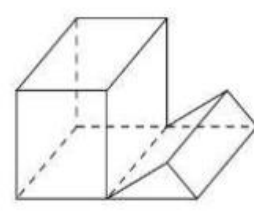
Hình 1



Hình 2



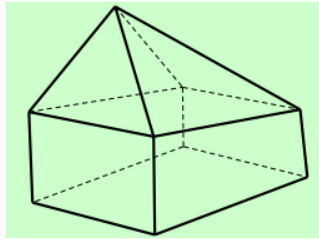
Hình 3



Hình 4

**A.** Hình 2.**B.** Hình 4.**C.** Hình 1.**D.** Hình 3.

**Câu 5.** Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu cạnh



A. 14

B. 20

C. 12

D. 16

**Câu 6.** Mệnh đề nào sau đây là **sai** ?

A. Hai mặt phân biệt của hình đa diện luôn có một cạnh chung.

B. Hai mặt phân biệt của hình đa diện có thể không có điểm chung.

C. Hai mặt phân biệt của hình đa diện có thể chỉ có một đỉnh chung.

D. Mỗi cạnh của hình đa diện là cạnh chung của đúng hai mặt của đa diện đó.

**Câu 7.** Cho một hình đa diện. Mệnh đề nào sau đây là **sai** ?

A. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh      B. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt

C. Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt      D. Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh

**Câu 8.** Một khối chóp có đáy là đa giác  $n$  cạnh. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. Số mặt và số đỉnh bằng nhau      B. Số đỉnh của khối chóp bằng  $n + 1$

C. Số cạnh của khối chóp bằng  $2n$       D. Số mặt của khối chóp bằng  $n$

**Câu 9.** Cho một hình đa diện có các mặt là hình tam giác, gọi  $M$  là số mặt và  $C$  là số cạnh của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**

A.  $3C = 2C$

B.  $C = M + 2$

C.  $M \geq C$

D.  $3M = 2C$

**Câu 10.** Cho một hình đa diện, gọi  $D$  là số đỉnh,  $M$  là số mặt và  $C$  là số cạnh của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**

A.  $D > 4, M > 4, C > 6$

B.  $D > 5, M > 5, C > 7$

C.  $D \geq 4, M \geq 4, C \geq 6$

D.  $D \geq 5, M \geq 5, C \geq 7$

**Câu 11.** Một hình lăng trụ có 24 đỉnh sẽ có bao nhiêu cạnh ?

A. 36 cạnh

B. 48 cạnh.

C. 24 cạnh

D. 36 cạnh

**Câu 12.** Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng ?

A. 4 mặt phẳng

B. 1 mặt phẳng.

C. 2 mặt phẳng

D. 3 mặt phẳng

**Câu 13.** Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng ?

A. 4 mặt phẳng

B. 3 mặt phẳng.

C. 6 mặt phẳng

D. 9 mặt phẳng

**Câu 14.** Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng ? (Đề 103-23)

A. 4 mặt phẳng

B. 1 mặt phẳng.

C. 2 mặt phẳng

D. 3 mặt phẳng

**Câu 15.** Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu trục đối xứng ?

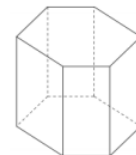
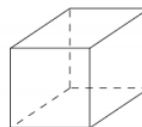
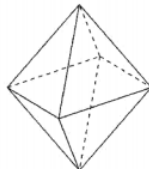
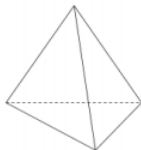
A. 1

B. 3

C. 4

D. 0

**Câu 16.** Hình đa diện nào dưới đây không có tâm đối xứng



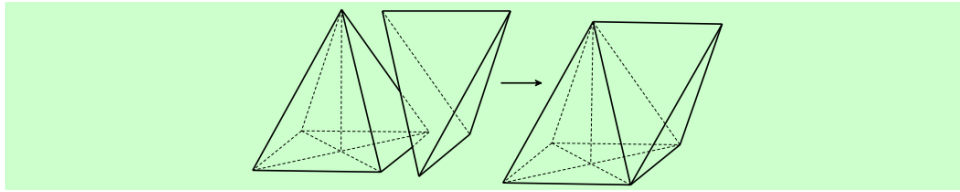
A. Tứ diện đều

B. Bát diện đều

C. Hình lập phương

D. Lăng trụ lục giác đều

**Câu 17.** Lắp ghép hai khối đa diện ( $H_1$ ) và ( $H_2$ ) để tạo thành khối đa diện ( $H$ ), trong đó ( $H_1$ ) là khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng  $a$ . ( $H_2$ ) là khối tứ diện đều cạnh  $a$  sao cho một mặt của ( $H_1$ ) trùng với một mặt của ( $H_2$ ) như hình vẽ. Hỏi khối đa diện ( $H$ ) có tất cả bao nhiêu mặt ?



A. 5

B. 7

C. 8

D. 9

**Câu 18.** Mặt phẳng  $(AB'C')$  chia khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  thành các khối đa diện nào ?

A. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.

B. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.

C. Hai khối chóp tam giác.

D. Hai khối chóp tứ giác.

**Câu 19.** Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

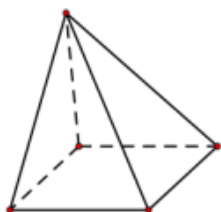
A. Hình tạo bởi hai tứ diện đều ghép với nhau là một đa diện lồi.

B. Tứ diện là đa diện lồi.

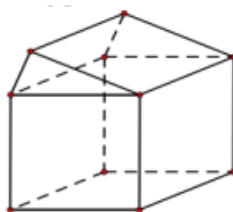
C. Hình lập phương là đa diện lồi

D. Hình hộp là đa diện lồi.

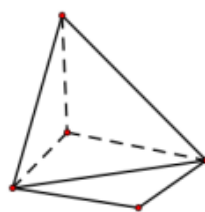
**Câu 20.** Hình nào dưới đây **không** phải hình đa diện lồi



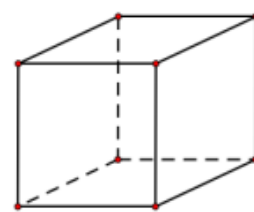
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

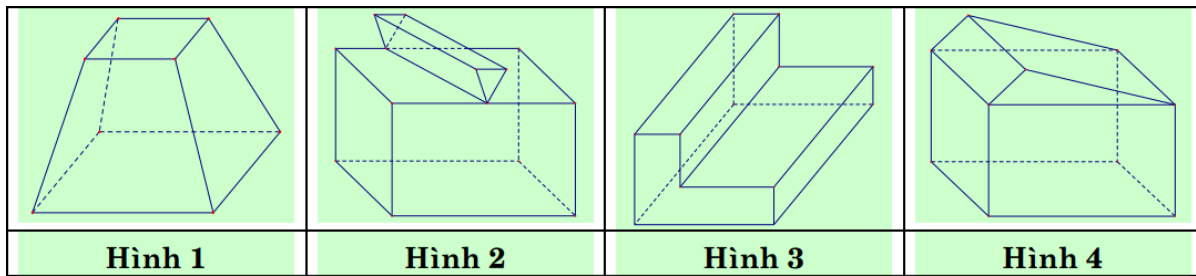
A. Hình 1

B. Hình 2

C. Hình 3

D. Hình 4

**Câu 21.** Cho các hình khối sau



Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), số đa diện lồi là:

- A. 1      B. 2.      C. 3      D. 4

**Câu 22.** Khối đa diện đều loại  $\{5;3\}$  có tên gọi là:

- A. Khối lập phương      B. Khối bát diện đều  
C. Khối mười hai mặt đều      D. Khối hai mươi mặt đều.

**Câu 23.** Cho khối hai mươi mặt đều thuộc loại  $\{p;q\}$ . Tính  $p - q$

- A. 2      B. 1.      C. -2      D. -1

**Câu 24.** Khối đa diện đều nào sau đây có các mặt không phải là các tam giác đều

- A. Khối mười hai mặt đều      B. Khối hai mươi mặt đều  
C. Khối tứ diện đều      D. Khối bát diện đều

**Câu 25.** Tâm tất cả các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của hình nào trong các hình sau ?

- A. Bát diện đều      B. Tứ diện đều      C. Lục giác đều      D. Ngũ giác đều

**Câu 26.** Các khối đa diện đều mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của ba mặt thì số đỉnh  $D$  và số cạnh  $C$  của các khối đa diện đó luôn thỏa mãn:

- A.  $D = C - 2$       B.  $D \geq C$       C.  $3D = 2C$       D.  $3C = 2D$

**Câu 27.** Tổng các góc của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại  $\{4;3\}$  là :

- A.  $\pi$       B.  $8\pi$       C.  $12\pi$       D.  $10\pi$

**Câu 28.** Tổng độ dài  $d$  của tất cả các cạnh của một khối mười hai mặt đều cạnh bằng 2

A.  $d = 8$

B.  $d = 16$

C.  $d = 24$

D.  $d = 60$

**Câu 29. (Đề 104-23)** Cho hình bát diện đều cạnh  $a$ . Gọi  $S$  là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

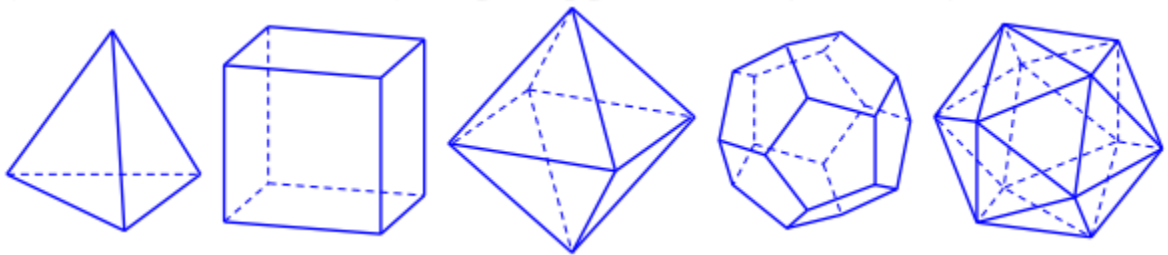
A.  $S = 4\sqrt{3}a^2$

B.  $S = \sqrt{3}a^2$

C.  $S = 2\sqrt{3}a^2$

D.  $S = 8a^2$

**Câu 30.** Trong không gian chỉ có 5 loại khối đa diện đều như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây **đúng**

A. Mọi khối đa diện đều có số mặt là những số chia hết cho 4

B. Khối lập phương và khối bát diện đều có cùng số cạnh

C. Khối tứ diện đều và bát diện đều có 1 tâm đối xứng

D. Khối 12 mặt đều và khối 20 mặt đều có cùng số đỉnh

**BÀI 3: THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN****A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ:**  $V = B.h$  với  $\begin{cases} B : \text{diện tích đáy;} \\ h : \text{chiều cao} \end{cases}$

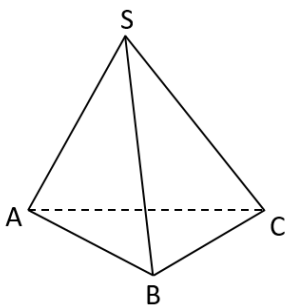
**THỂ TÍCH KHỐI HỘP CHỮ NHẬT:**  $V = a.b.c$  với  $a, b, c$  là ba kích thước

**THỂ TÍCH KHỐI LẬP PHƯƠNG:**  $V = a^3$  với  $a$  là độ dài cạnh

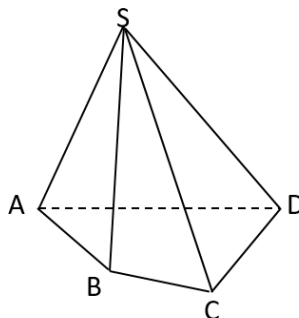
**THỂ TÍCH KHỐI CHÓP:**  $V = \frac{1}{3} B.h$  với  $\begin{cases} B : \text{diện tích đáy} \\ h : \text{chiều cao} \end{cases}$

**TỈ SỐ THỂ TÍCH TỨ DIỆN:** Cho khối tứ diện  $SABC$  và  $A', B', C'$  là các điểm tùy ý lần lượt thuộc  $SA, SB, SC$  ta có:  $\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$

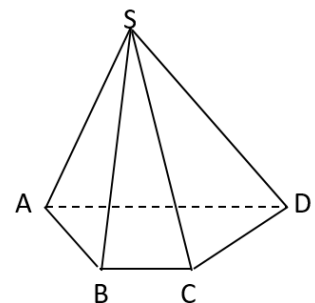
**\* Một số dạng hình thường gặp:**



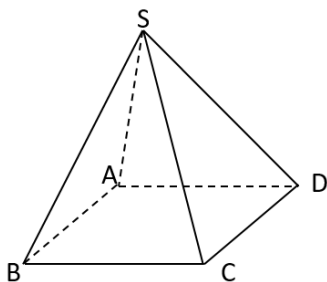
Hình chóp đáy tam giác



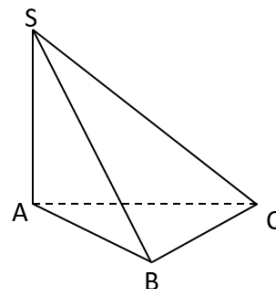
Hình chóp đáy tứ giác



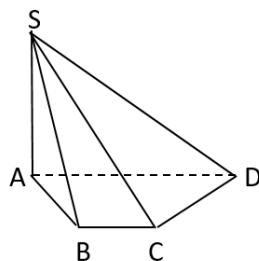
Hình chóp đáy hình thang



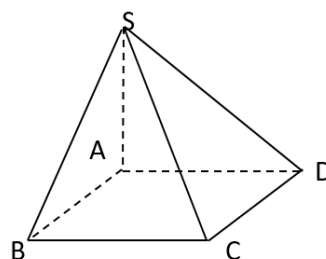
Hình chóp có đáy là hbh, ht, hcn, hv



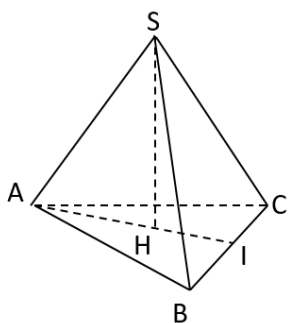
Hình chóp đáy tam giác có  $SA \perp$  đáy



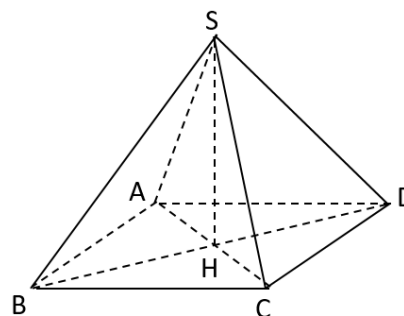
Hình chóp đáy hình thang có  $SA \perp$  đáy



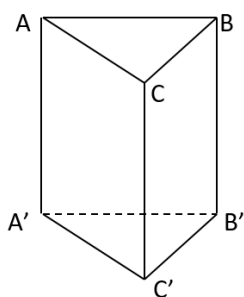
Hình chóp đáy là hbh, ht, hcn, hv có  $SA \perp$  đáy



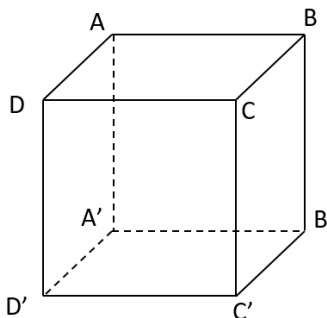
Hình chóp đều đáy tam giác



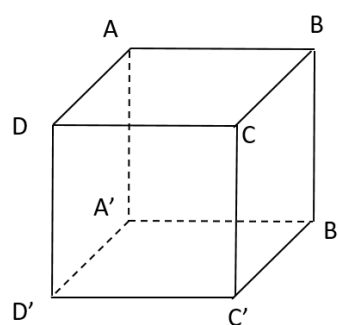
Hình chóp đều đáy tứ giác



Lăng trụ đứng tam giác



Hình hộp chữ nhật



Hình lập phương

**B. BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài 1:** Cho khối chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh  $SB \perp (ABCD)$ . Biết  $AB = 3a$ ,  $AC = 4a$ ,  $SC = \sqrt{29}a$ . Tính thể tích khối chóp S.ABC. Đs:  $V_{S.ABC} = 4a^3$

**Bài 2:** Cho khối chóp S.ABC có đường cao  $SA = a$ , đáy là tam giác vuông cân,  $AB = BC = a$ . B' là trung điểm của SB và C' là chân đường cao hạ từ A của tam giác SAC.

a. Tính thể tích khối chóp S.ABC. Đs:  $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{6}$

b. Chứng minh:  $SC \perp (AB'C')$

c. Tính thể tích khối chóp S.AB'C'. Đs:  $V_{S.AB'C'} = \frac{a^3}{36}$

**Bài 3:** Cho hình chóp S.ABC, có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a,  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = 2a$ . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên cạnh SB, SC.

a. Tính thể tích khối chóp S.ABC. Đs:  $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

b. Tính thể tích khối chóp S.AEF. Đs:  $V_{S.AEF} = \frac{8a^3\sqrt{3}}{75}$

c. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp S.AEF và ABCEF. Đs:  $\frac{16}{9}$

**Bài 4:** Cho khối chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a. Các cạnh bên tạo với đáy một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích khối chóp S.ABC. Đs:  $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

**Bài 5:** Cho khối chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng 2a. Góc tạo bởi cạnh bên và đáy một góc  $30^\circ$ . Tính thể tích khối chóp S.ABC. Đs:  $V_{S.ABC} = \frac{a^3 2\sqrt{3}}{9}$

**Bài 6:** Cho khối chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng 2a, cạnh bên bằng 2a. Tính thể tích của khối chóp S.ABC. Đs:  $V_{S.ABC} = \frac{a^3 2\sqrt{2}}{3}$

**Bài 7:** Cho khối chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng a. Góc tạo bởi mặt bên và đáy một góc  $60^\circ$ .

Tính thể tích khối chóp S.ABC.

$$\text{Đs: } V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$$

**Bài 8:** Tính thể tích khối tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a.    Đs:  $V_{D.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$

**Bài 9:** Cho khối chóp tam giác đều S.ABC, có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng 2a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của cạnh SA, SB.

a. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

$$\text{Đs: } V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{11}}{12}$$

b. Tính thể tích khối chóp S.IJC.

$$\text{Đs: } V_{S.IJC} = \frac{a^3 \sqrt{11}}{48}$$

**Bài 10:** Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

**Bài 11:** Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh SA vuông với đáy và  $SC = 2a$ . Tính thể tích hình chóp S.ABCD.

$$\text{Đs: } V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$

**Bài 12:** Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 2a. Cạnh SB vuông với đáy và  $SC = 3a$ . Tính thể tích hình chóp S.ABCD.

$$\text{Đs: } V_{S.ABCD} = \frac{4a^3 \sqrt{5}}{3}$$

**Bài 13:** Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 2a. Cạnh  $SB \perp (ABCD)$  và  $SD = 3a$ .

a. Chứng minh Các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.

b. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

$$\text{Đs: } V_{S.ABCD} = \frac{4a^3}{3}$$

**Bài 14:** Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi và cạnh  $AC = 2a$ ,  $BD = a$ . Cạnh  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = 2a$ .

a. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

$$\text{Đs: } V_{S.ABC} = \frac{a^3}{3}$$

b. Chứng minh:  $(SBD) \perp (SAC)$

**Bài 15:** Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh  $SC \perp (ABCD)$  và SA tạo với đáy góc  $30^\circ$ .

a. Chứng minh Các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.

b. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

$$\text{Đs: } V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{18}$$

**Bài 16:** Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a. Góc  $SAC = 45^\circ$ . Tính thể tích hình chóp S.ABCD.

$$\text{Đs: } V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$$

**Bài 17\*:** Cho h/chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$  và H là tâm của đáy.

a. Chứng minh  $SH \perp (ABCD)$ .

b. Tính thể tích hình chóp S.ABCD.

$$\text{Đs: } V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{3}$$

**Bài 18\*:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với đáy góc  $45^\circ$ . Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

$$\text{Đs: } V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{6}$$

**Bài 19\*:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với đáy góc  $60^\circ$ . Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

$$\text{Đs: } V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$$

**Bài 20\*:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

$$\text{Đs: } V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$$

**Bài 21\*:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông; cạnh  $BD = 2a$ . Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy,  $SC = a\sqrt{3}$ . Tính thể tích khối chóp S.ABCD

$$\text{Đs: } \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$$

**Bài 22:** Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy là  $a\sqrt{2}$  và  $AA' = a\sqrt{5}$ .

Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

$$\text{Đs: } \frac{a^3 \sqrt{15}}{2}$$

**Bài 23:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình chữ nhật với  $AB = a$   
 $AD = a\sqrt{3}$  và  $AC' = a\sqrt{5}$ . Tính thể tích khối lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  Đs:  $a^3\sqrt{3}$

**Bài 24:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ . Hình chiếu của đỉnh A trên  $(A'B'C')$  là trung điểm H của  $A'B'$ . Góc giữa  $AC'$  và đáy  $(A'B'C')$  bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ .  
 Đs:  $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

**Bài 25:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $2a$ , cạnh bên bằng  $a\sqrt{3}$ . Hình chiếu vuông góc của A' trên  $(ABC)$  trùng với trung điểm của AB. Tính thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$   
 Đs:  $a^3\sqrt{6}$

### BÀI TẬP TỈ SỐ THỂ TÍCH (NC)

**Bài 1.** Cho khối chóp tam giác  $S.ABC$ , trên 3 đường thẳng  $SA, SB, SC$  lần lượt lấy 3 điểm  $A', B', C'$  khác S. Gọi  $V$  và  $V'$  lần lượt là thể tích các khối chóp  $S.ABC$  và  $S.A'B'C'$ . Chứng minh:  

$$\frac{V}{V'} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}$$

**Bài 2.** Cho khối chóp  $S.ABC$  có đường cao  $SA = a$ , đáy là tam giác vuông cân có  $AB = BC = a$ . Gọi  $B'$  là trung điểm  $SB$ ,  $C'$  là chân đường cao hạ từ A của tam giác  $SAC$   
 a. Tính thể tích khối chóp  $S.ABC$   
 b. Tính thể tích khối chóp  $S.AB'C'$

**Bài 3\*.** Cho khối chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành, M là trung điểm của  $SC$ . Mặt phẳng  $(p)$  đi qua AM và song song với  $BD$ , chia khối chóp thành 2 phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

**Bài 4\*.** Cho khối chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua A, B và trung điểm M của  $SC$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  chia khối chóp thành 2 phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

**Bài 5\*.** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  có độ dài cạnh đáy  $a$ . Gọi M, N lần lượt là trung điểm  $SB, SC$ . Tính thể tích  $S.AMN$  biết rằng  $mp(AMN)$  vuông góc với  $mp(SBC)$

### ĐỀ ÔN TẬP HÌNH HỌC CHƯƠNG I

#### ĐỀ 1:

**Bài 1 :** Cho hình chóp tam giác  $SABC$  có mặt đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại A,  $SB$  vuông góc với mặt đáy biết  $BC = a\sqrt{2}$ . Góc giữa cạnh  $SA$  và mặt đáy bằng  $60^\circ$ .

a. Tính chiều cao của hình chóp  $SABC$ .

b. Tính thể tích khối chóp  $SABC$ .

c. Gọi M là trung điểm của SB. Tính thể tích khối chóp SMAC.

**Bài 2** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có mặt đáy ABC là tam giác đều cạnh a,

$A'H \perp (ABC)$  sao cho H là trung điểm của AC, biết  $AA' = a$ .

a. Xác định góc giữa  $AA'$  và mặt đáy (ABC).

b. Tính thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ .

### ĐỀ SỐ 2:

**Câu 1** Cho hình chóp S. ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy.  $SA = BC$ , biết  $CA = 3a$ ,  $BA = 5a$ ; Tính thể tích của S. ABC.

**Câu 2** . Cho hình chóp S. ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh  $BC = a\sqrt{2}$  , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy ; mặt bên (SBC) tạo với mặt đáy (ABC) một góc bằng  $45^\circ$  .

a) Tính thể tích khối chóp S. ABC.

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng(S BC).

### ĐỀ SỐ 3:

**Câu 1** Cho hình chóp S. ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy.  $SA = AB = 2a$ . Tính thể tích của S. ABC.

**Câu 2** . Cho hình chóp S. ABC có tam giác ABC đều cạnh  $2a$ , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và  $SA = a\sqrt{3}$  . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC.

a) Tính thể tích khối chóp S. AMN.

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng(SMN).

### ĐỀ SỐ 4:

**Câu 1** . Cho hình chóp S. ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy.  $SA = AB = 2a$ ,  $BC = 3a$ . Tính thể tích của S. ABC.

**Câu 2** . Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy ABC là tam giác vuông tại A,  $AB = a$ ,  $AC = a\sqrt{3}$  , cạnh  $AB'$  tạo với mặt đáy góc  $30^\circ$  .

a) Tính thể tích khối lăng trụ.

b) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng(ABC')

### ĐỀ SỐ 5:

**Câu 1** Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại B,  $AB = a\sqrt{2}$ ,  $AC = a\sqrt{3}$ , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và  $SB = a\sqrt{3}$ . Tính thể tích khối chóp S.ABC

**Câu 2** . Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B,  $AB=a$ ,  $BC = a\sqrt{2}$  , mặt bên (A'BC) hợp với mặt đáy (ABC) một góc  $30^0$  .

a) Tính thể tích khối lăng trụ.

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng(A'BC)

### ĐỀ SỐ 6:

**Câu 1** . Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông cân tại B,  $AC = a\sqrt{2}$  , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và  $SB = a\sqrt{3}$  . Tính thể tích khối chóp S.ABC ;

**Câu 2** . Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh  $2a\sqrt{3}$  , hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm H của tam giác ABC, cạnh A'A hợp với mặt đáy (ABC) một góc  $30^0$ .

a) Tính thể tích khối lăng trụ.

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng(A'BC).

**Câu 3:** Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A,  $AC= 2AB$ .

Biết  $A'A = A'B = A'C = a$  và A'A hợp với đáy một góc  $60^0$ .

a) Chứng minh (A'BC) vuông góc với (ABC).

b) Tính thể tích lăng trụ ABC.A'B'C'.

## C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### I/ THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

#### 1/ KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

**Câu 1.** Cho khối chóp S.ABC có  $SA \perp (ABC)$ , tam giác ABC vuông tại B,  $AB = a$ ,  $AC = a\sqrt{3}$ . Tính thể tích khối chóp S.ABC biết rằng  $SB = a\sqrt{5}$

A.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$

**Câu 2:** Cho khối chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp biết  $SC = a\sqrt{3}$

A.  $\frac{2a^3\sqrt{6}}{9}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

**Câu 3:** Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với  $AC = a$  biết SA vuông góc với mp(ABC) và SB hợp với đáy một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích hình chóp

A.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{48}$

**Câu 4:** Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết SA vuông góc với đáy ABC và (SBC) hợp với đáy (ABC) một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích hình chóp

A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

C.  $\frac{a^3}{4}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

**Câu 5:** Cho hình chóp tam giác SABC có cạnh đáy  $AB=2a$ ,  $BC=3a$ ; Góc giữa AB và BC bằng  $60^\circ$ . Tính theo a thể tích khối chóp SABC biết SA vuông góc với đáy và  $SA=4a$

A.  $2\sqrt{3}a^3$

B.  $\sqrt{3}a^3$

C.  $4\sqrt{3}a^3$

D.  $2a^3$

**Câu 6:** Cho hình chóp tam giác SABC có cạnh đáy  $AB=AC=2a$ ,  $BC=3a$ ; Tính theo a thể tích khối chóp SABC biết SA vuông góc với đáy và  $SA=3a$

A.  $\frac{\sqrt{15}a^3}{2}$

B.  $\frac{\sqrt{15}a^3}{4}$

C.  $\frac{3a^3\sqrt{7}}{2}$

D.  $\frac{3a^3\sqrt{7}}{4}$

**Câu 7:** Cho hình chóp tam giác SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a; Tính theo a thể tích khối chóp SABC biết SA vuông góc với đáy và  $SA = \sqrt{3}a$

A.  $\frac{3a^3}{2}$

B.  $a^3$

C.  $3a^3$

D.  $\frac{a^3}{4}$

**Câu 8:** Cho hình chóp tam giác SABC có  $AC=3a$ ,  $AB=4a$ ,  $BC=5a$ ; Tính theo a thể tích khối chóp SABC biết SA vuông góc với đáy và  $SA=2a$

A.  $a^3$

B.  $2a^3$

C.  $4a^3$

D.  $6a^3$

**Câu 9:** Cho hình chóp tam giác SABC có ABC là tam giác vuông tại A;  $AB=AC=a$ ; Tính theo a thể tích khối chóp SABC biết SA vuông góc với đáy và  $SA=2a$

A.  $a^3$

B.  $\frac{a^3}{6}$

C.  $\frac{a^3}{3}$

D.  $3a^3$

**Câu 10:** Cho hình chóp SABC có đáy là tam giác vuông cân tại C, cạnh SA vuông góc với mặt đáy, biết  $AB=2a$ ,  $SB=3a$ ; Thể tích khối chóp SABC là V. Tỷ số  $\frac{8V}{a^3}$  có giá trị là.

A.  $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

B.  $\frac{8\sqrt{5}}{3}$

C.  $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

D.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

**Câu 11:** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh  $a\sqrt{5}$ . SA vuông góc với đáy.  $SA = 2a\sqrt{2}$ . Tính theo a thể tích khối chóp SABCD.

A.  $\frac{10a^3\sqrt{2}}{3}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

C.  $5a^3\sqrt{2}$

D.  $\frac{2a^3\sqrt{10}}{3}$

**Câu 12:** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a và SA vuông góc với đáy ABCD và mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích hình chóp SABCD

A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

B.  $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

D.  $a^3\sqrt{3}$

**Câu 13:** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Góc giữa SB và đáy bằng  $60^\circ$ .  $SA=2a$ ; Tính theo a thể tích khối chóp SABCD

A.  $3a^3$

B.  $\frac{8a^3}{9}$

C.  $8a^3$

D.  $\frac{8a^3}{6}$

**Câu 14:** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông và SA vuông góc với đáy.  $SA=3a$ . Góc giữa mặt phẳng (SBC) và đáy bằng  $30^\circ$ . Tính theo a thể tích khối chóp SABCD

A.  $9a^3$

B.  $a^3$

C.  $3a^3$

D.  $27a^3$

**Câu 15:** Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O,  $AC = 2AB = 2a$ , SA vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp biết  $SD = a\sqrt{5}$

A.  $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$

C.  $a^3\sqrt{6}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

**Câu 16:** Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật biết rằng  $SA \perp (ABCD)$ , SC hợp với đáy một góc  $45^\circ$  và  $AB = 3a$ ,  $BC = 4a$ . Tính thể tích khối chóp

- A.  $20a^3$                       B.  $40a^3$                       C.  $10a^3$                       D.  $\frac{10a^3\sqrt{3}}{3}$

**Câu 17:** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a; Góc A bằng  $60^\circ$ . SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và đáy bằng  $60^\circ$ . Tính theo a thể tích khối chóp SABCD

- A.  $a^3$                       B.  $2a^3$                       C.  $4a^3$                       D.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

**Câu 18:** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a; Góc A bằng  $60^\circ$ . O là tâm hình thoi. SA vuông góc với đáy. Góc giữa SO và đáy bằng  $45^\circ$ . Tính theo a thể tích khối chóp SABCD

- A.  $a^3$                       B.  $\frac{a^3}{4}$                       C.  $\frac{a^3}{2}$                       D.  $2a^3$

**Câu 19:** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A, B biết  $AB = BC = a$ ,  $AD = 2a$ . Cho SA vuông với mặt đáy và cạnh bên SC hợp với đáy một góc bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích hình chóp

- A.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$                       B.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$                       C.  $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$                       D.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

**Câu 20:** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A, D biết  $AD = CD = a$ ,  $AB = 2a$ ; Cho SA vuông góc với đáy và SD hợp với đáy một góc bằng  $30^\circ$ . Tính thể tích khối chóp là:

- A.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$                       B.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$                       C.  $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$                       D.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

## 2/ KHỐI CHÓP ĐỀU

**Câu 21:** Thể tích của khối tứ diện đều cạnh a bằng:

- A.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$                       B.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$                       C.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$                       D.  $\frac{a^3}{12}$

**Câu 22:** Cho hình chóp tam giác đều SABC có cạnh bên a, góc ở đáy của mặt bên là  $45^\circ$ . Tính thể tích hình chóp SABC.

A.  $\frac{a^2}{3}$

B.  $\frac{a^3}{6}$

C.  $\frac{a^3}{4}$

D.  $\frac{a^3}{5}$

**Câu 23:** Cho hình chóp tam giác đều có đường cao  $h$  và mặt bên có góc ở đỉnh bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích hình chóp.

A.  $\frac{h^3\sqrt{3}}{8}$

B.  $\frac{h^3\sqrt{4}}{8}$

C.  $\frac{h^3\sqrt{2}}{6}$

D.  $\frac{h^3\sqrt{3}}{6}$

**Câu 24:** Cho (H) là khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng  $a$ ; Thể tích của (H) bằng:

A.  $\frac{a^3}{3}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

**Câu 25:** Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng  $a$ , hợp với đáy một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích hình chóp.

A.  $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{4}}{8}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

D.  $\frac{a^2\sqrt{5}}{5}$

**Câu 26:** Cho hình chóp đều SABC có cạnh bên bằng  $a$  hợp với đáy ABC một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích hình chóp.

A.  $\frac{3a^3}{16}$

B.  $\frac{3a^2}{16}$

C.  $\frac{3a^2}{8}$

D.  $\frac{3a^3}{8}$

**Câu 27:** Cho hình chóp tam giác đều SABC có cạnh bên  $a$ , góc ở đáy của mặt bên là  $45^\circ$ . Tính thể tích hình chóp.

A.  $\frac{9a^3\sqrt{2}}{2}$

B.  $\frac{9a^2\sqrt{3}}{2}$

C.  $\frac{3a^3}{2}$

D.  $\frac{a^3}{6}$

**Câu 28:** Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy bằng  $a$ , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng  $\varphi$  Thể tích khối chóp SABCD theo  $a$  và  $\varphi$  bằng

A.  $\frac{2a^3 \tan \varphi}{3}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{2} \tan \varphi}{6}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{2} \tan \varphi}{12}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{2} \tan \varphi}{3}$

**Câu 29:** Cho hình chóp tam giác đều SABC có cạnh đáy  $a$  và mặt bên hợp với đáy một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích hình chóp SABC.

A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

**Câu 30:** Cho chóp tam giác đều có đường cao h hợp với một mặt bên một góc  $30^\circ$ . Tính thể tích hình chóp.

A.  $\frac{h^3\sqrt{3}}{3}$

B.  $\frac{h^3\sqrt{3}}{6}$

C.  $\frac{h^3\sqrt{3}}{9}$

D.  $\frac{h^2\sqrt{2}}{4}$

### 3/ KHỐI CHÓP CÓ MẶT BÊN VUÔNG MẶT ĐÁY

**Câu 31:** Cho hình chóp SABC có  $\angle BAC = 90^\circ$ ;  $\angle ABC = 30^\circ$ ; SAB là tam giác đều cạnh a và  $\text{mp}(SAB) \perp \text{mp}(ABC)$ . Tính thể tích khối chóp S.ABC.

A.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

C.  $\frac{a^3}{12}$

D.  $2a^2\sqrt{2}$

**Câu 32:** Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác đều cạnh a, BCD là tam giác vuông cân tại D,  $(ABC) \perp (BCD)$  và AD hợp với (BCD) một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích tứ diện ABCD.

A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

D.  $2a^2\sqrt{3}$

**Câu 33:** Cho hình chóp SABC có đáy là tam giác cân tại A,  $AB = AC = a$ ,  $\angle BAC = 120^\circ$ . Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích khối chóp SABC

A.  $\frac{a^3}{8}$

B.  $a^3$

C.  $\frac{a^3}{2}$

D.  $2a^3$

**Câu 34:** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a; Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ABCD. Tính thể tích khối chóp SABCD.

A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

B.  $a^3\sqrt{3}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

**Câu 35:** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, biết  $(SAB)$  và  $(SAD)$  cùng vuông góc với đáy,  $SA = a\sqrt{3}$ . Tính  $V_{SABCD}$ :

A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

**Câu 36:** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với  $AB = a$ ,  $AD = 2a$ , (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy,  $SA = a\sqrt{2}$ . Tính  $V_{S.ABCD}$ :

A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

B.  $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

**Câu 37:** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, tam giác SAB đều cạnh  $a$  nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, biết  $AD = 4a$ ; Tính  $V_{S.ABCD}$ :

A.  $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

B.  $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

**Câu 38:** Cho ABCD, ABCD là hình thoi.  $AB = a$ ,  $\angle ABC$  là góc  $60^\circ$ , tam giác SAB cân nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. SC hợp với đáy góc  $45^\circ$ . Tính thể tích khối chóp.

A.  $3a^3$

B.  $\frac{a^3}{2}$

C.  $\frac{a^3}{4}$

D.  $a^3\sqrt{2}$

**Câu 39:** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi với  $AC = 2BD = 2a$  và  $\triangle SAD$  vuông cân tại S, nằm trong mặt phẳng vuông góc với ABCD. Tính thể tích hình chóp SABCD.

A.  $\frac{a^3\sqrt{5}}{12}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{5}}{4}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

#### 4/ TỶ SỐ THỂ TÍCH

**Câu 40:** Nếu 2 khối chóp có cùng chiều cao thì tỉ số thể tích bằng tỉ số:

A. Diện tích 2 đáy

B. 2 Đường cao

C. Cạnh đáy

D. Cạnh bên

**Câu 41:** Nếu 2 khối chóp có cùng diện tích đáy thì tỉ số thể tích bằng tỉ số:

A. Diện tích 2 đáy

B. 2 Đường cao

C. Cạnh đáy

D. Cạnh bên

**Câu 42:** Đối với 2 khối chóp tam giác có:  $\frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$  bằng:

A.  $V_{S.ABC}$

B.  $V_{S.A'B'C'}$

C.  $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}$

D.  $2V_{S.A'B'C'}$

**Câu 43:** Cho tứ diện ABCD. Gọi B' và C' lần lượt là trung điểm của AB và AC. Khi đó tỉ số thể tích của khối tứ diện AB'C'D và khối tứ diện ABCD bằng:

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{1}{4}$

C.  $\frac{1}{6}$

D.  $\frac{1}{8}$ .

**Câu 44:** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành và I là trung điểm của SC. Mặt phẳng qua AI và song song với BD chia hình chóp thành 2 phần. Tính tỉ số thể tích 2 phần này

A. 1

B.  $\frac{1}{2}$

C.  $\frac{1}{3}$

D.  $\frac{1}{4}$

## II. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

### 1. LĂNG TRỤ ĐỨNG TAM GIÁC

**Câu 1:** Cho (H) lăng trụ đứng ABCA'B'C' đáy là tam giác vuông cân tại B, AC =  $a\sqrt{2}$  biết góc giữa A'B và đáy bằng  $60^\circ$ . Thể tích của (H) bằng:

A.  $\sqrt{3}a^3$

B.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$

C.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$

D.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$

**Câu 2:** Cho (H) lăng trụ đứng ABCA'B'C' đáy là tam giác vuông cân tại B, AC =  $a\sqrt{2}$  biết góc giữa (A'BC) và đáy bằng  $60^\circ$ . Thể tích của (H) bằng:

A.  $\sqrt{6}a^3$

B.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$

C.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$

D.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$

**Câu 3:** Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC vuông cân tại B có AB =  $\frac{a}{2}$ . Biết A'C = a và A'C hợp với mặt bên (AA'B'B) một góc  $30^\circ$ . Tính thể tích lăng trụ

A.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{16}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

C.  $\frac{27a^3}{8}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$

**Câu 4:** Cho lăng trụ đứng tam giác ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với BA = BC = a, biết (A'BC) hợp với đáy (ABC) một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích lăng trụ

A.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

C.  $a^3\sqrt{6}$

D.  $\frac{27a^3}{8}$

**Câu 5:** Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B. AB = 2a, BC = a, AA' =  $2a\sqrt{3}$ . Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABCA'B'C'.

A.  $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

C.  $4a^3\sqrt{3}$

D.  $2a^3\sqrt{3}$

**Câu 6:** Cho lăng trụ đứng  $ABCA'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $\frac{a}{3}$ . Góc giữa mặt  $(A'BC)$  và mặt đáy là  $45^\circ$ . Tính theo  $a$  thể tích khối lăng trụ  $ABCA'B'C'$ .

A.  $\frac{a^3}{48}$

B.  $\frac{a^3}{24}$

C.  $\frac{a^3}{3}$

D.  $\frac{a^3}{16}$

**Câu 7:** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ . Góc giữa cạnh  $C'B$  và mặt đáy là  $30^\circ$ . Tính theo  $a$  thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ .

A.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{27}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{54}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

**Câu 8:** Cho lăng trụ đứng  $ABCA'B'C'$  có đáy là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AC=a$ ,  $\angle ACB = 60^\circ$ . Đường chéo  $BC'$  của mặt bên  $(BCC'B')$  tạo với mặt phẳng  $(AA'C'C)$  một góc  $30^\circ$ . Tính thể tích của khối lăng trụ theo  $a$

A.  $a^3\sqrt{6}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

C.  $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$

D.  $\frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$

**Câu 9:** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ .  $AB = a\sqrt{2}$ ,  $BC = 3a$ . Góc giữa cạnh  $A'B$  và mặt đáy là  $60^\circ$ . Tính theo  $a$  thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ .

A.  $2a^3\sqrt{3}$

B.  $3a^3\sqrt{3}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

D.  $a^3\sqrt{3}$

**Câu 10:** Cho lăng trụ đứng  $ABCA'B'C'$  đáy là tam giác vuông cân tại  $B$ ,  $AC = a\sqrt{3}$ , biết góc giữa  $(A'BC)$  và đáy bằng  $60^\circ$ . Thể tích khối lăng trụ bằng:

A.  $\frac{27a^3}{8}$

B.  $a^3\sqrt{6}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{7}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

**Câu 11:** Cho  $ABCA'B'C'$  đáy là tam giác đều cạnh  $\frac{2a}{3}$ . Góc giữa  $(AB'C')$  và đáy là  $45^\circ$ .

$V_{LT}$  là

A.  $\frac{a^3}{9}$

B.  $2a^3\sqrt{3}$

C.  $a^3\sqrt{6}$

D.  $a^3\sqrt{3}$

**Câu 12:** Cho lăng trụ XYZ.  $X'Y'Z'$  đáy tam giác đều.  $XY = a$ ,  $XX' = a\sqrt{2}$ .  $V_{LT} = ?$

A.  $a^3\sqrt{6}$

B.  $\frac{2a^3}{5}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

D.  $2a^3\sqrt{3}$

**Câu 13:** Cho lăng trụ đứng  $ABCA'B'C'$  có đáy ABC là tam giác vuông tại A,  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ , mặt bên  $ACC'A'$  là hình vuông. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AC,  $CC'$ ,  $A'B'$  và H là hình chiếu của A lên BC. Tính thể tích khối chóp  $A'.HMN$

A.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{33}$

B.  $\frac{9a^3}{32}$

C.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{23}$

D.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{34}$

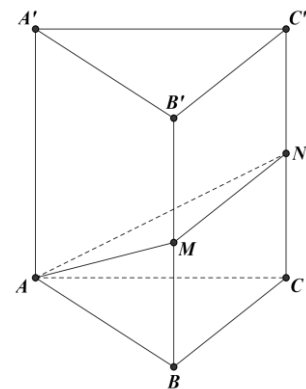
**Câu 14:** Cho khối lăng trụ đứng tam giác  $ABCA'B'C'$  có thể tích bằng V. M, N lần lượt là trung điểm  $BB'$  và  $CC'$ . Thể tích của khối  $ABCMN$  bằng:

A.  $\frac{V}{2}$

B.  $\frac{V}{3}$

C.  $\frac{2V}{3}$

D.  $\frac{V}{4}$



## 2. LĂNG TRỤ ĐỨNG TỨ GIÁC

**Câu 15:** Cho lăng trụ đứng  $ABCD A'B'C'D'$  với đáy ABCD là hình vuông.  $BD' = 2a$  và  $AB = a$ ; Tính  $V_{LT}$

A.  $a^3\sqrt{2}$

B.  $a^3\sqrt{3}$

C.  $2a^3\sqrt{3}$

D.  $\frac{2a^3}{5}$

**Câu 16:** Cho lăng trụ đứng  $XYZT$ .  $X'Y'Z'T'$ . Cạnh bên  $XX' = 2a$  và khoảng cách

$d_{(T;(XZT'))} = a$ ; Tính thể tích lăng trụ

A.  $\frac{4a^3}{3}$

B.  $a^3\sqrt{2}$

C.  $2a^3\sqrt{3}$

D.  $\frac{a^3}{4}$

**Câu 17:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABCD A'B'C'D'$ . Đáy là hình chữ nhật ABCD có  $AB = a$  và  $BC = 2AB$ , góc  $BCB'$  bằng  $30^\circ$ . Tính  $V_{LT}$

A.  $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$

B.  $a^3\sqrt{3}$

C.  $a^3\sqrt{2}$

D.  $\frac{a^3}{9}$

**Câu 18:** Cho lăng trụ đứng ABCDA'B'C'D. Đáy ABCD là hình chữ nhật có  $CD = a$  và  $S = \frac{a^2}{2}$ . Góc giữa B'D và (ABCD) bằng  $45^\circ$ . tính  $V_{LT}$

A.  $\frac{a^3\sqrt{5}}{4}$

B.  $\frac{7a^3}{2}$

C.  $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

D.  $a^3\sqrt{8}$

**Câu 19:** Cho lăng trụ ABCDA'B'C'D' đáy ABCD là hình thoi cạnh  $a\sqrt{3}$ . Gọi O là giao điểm hai đường chéo, OC tạo với mp (A'B'C'D') một góc  $60^\circ$  và  $CC' = 2a$ . Tính thể tích lăng trụ. Biết diện tích hình thoi  $S = \frac{1}{2}d_1d_2$ .

A.  $4a^3\sqrt{5}$

B.  $a^3\sqrt{3}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$

**Câu 20:** Cho hình hộp đứng ABCDA'B'C'D', có đáy là hình thoi cạnh bằng  $a$  và  $\angle BAD = 60^\circ$ . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và B'C biết rằng MN vuông góc với BD'. Tính thể tích khối hộp ABCDA'B'C'D'.

A.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$

B.  $\frac{3a^3}{6}$

C.  $\frac{\sqrt{7}a^3}{4}$

D.  $\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$

**Câu 21:** Cho hình lăng trụ đứng ABCDA'B'C'D' có đáy là hình thoi cạnh  $a$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $AC' = 2a$ . Gọi  $O = AC \cap BD$ ,  $E = A'C \cap OC'$ . Tính thể tích lăng trụ ABCDA'B'C'D' là:

A.  $3\sqrt{3}a^3$

B.  $\frac{3a^3}{4}$

C.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$

D.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$

### 3. LĂNG TRỤ ĐỀU

**Câu 22:** Hình lăng trụ đều là:

A. Lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều

B. Lăng trụ có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau

C. Lăng trụ có đáy là tam giác đều và cạnh bên vuông góc với đáy

D. Lăng trụ có tất cả các cạnh bằng nhau

**Câu 23:** Cho (H) là khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh bằng  $a$ .

Thể tích của (H) bằng:

A.  $\frac{a^3}{2}$

B.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

C.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

**Câu 24:** Cho lăng trụ tam giác đều  $ABCA'B'C'$ , cạnh đáy bằng  $a$ ; Gọi  $M, N, I$  lần lượt là trung điểm của  $AA', AB, BC$ ; góc giữa hai mặt phẳng  $(C'AI)$  và  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Tính theo  $a$  thể tích khối chóp  $NAC'I$

A.  $32\sqrt{3}a^3$

B.  $\frac{3a^3}{32}$

C.  $\frac{a^3}{32}$

D.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$

**Câu 25:** Cho lăng trụ đều  $ABCD A'B'C'D'$ .  $ABCD$  là hình vuông cạnh và  $BD' = a$ ; Góc giữa  $BD'$  và  $(AA'D'D)$  bằng  $30^\circ$ . Tính thể tích lăng trụ

A.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$

B.  $a^3$

C.  $a^3\sqrt{8}$

D.  $\frac{a^3\sqrt{8}}{3}$

**Câu 26:** Cho  $ABCD A'B'C'D'$  là lăng trụ đều. Đáy là hình vuông  $ABCD$ , góc giữa  $mp(ACD')$  và  $mp(ABCD)$  là  $45^\circ$ . Tính thể tích lăng trụ, biết  $AA' = 2a$ .

A.  $16a^3$

B.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

C.  $\frac{a^3}{9}$

D.  $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$

**Câu 27:** Cho lăng trụ  $ABCD A'B'C'D'$ . Đáy  $ABCD$  là hình vuông tâm  $O$ . có  $OA' = a$  và  $OA'$  hợp với  $(ABCD)$  một góc  $60^\circ$ .  $V_{LT} = ?$

A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

B.  $2a^3\sqrt{3}$

C.  $a^3\sqrt{8}$

D.  $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$

**Câu 28:** Cho lăng trụ đứng  $ABCA'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ ;  $BC'$  hợp với  $mp(ABB'A')$  một góc  $30^\circ$ . Tính  $V_{LT}$ .

A.  $a^3\frac{\sqrt{6}}{4}$

B.  $\frac{2a^3}{5}$

C.  $a^3\sqrt{2}$

D.  $\frac{a^3}{9}$

**Câu 29:** Cho lăng trụ đứng  $ABCA'B'C'$  đáy là tam giác đều cạnh  $2a$ ;  $BC'$  hợp với đáy góc  $30^\circ$ . Tính thể tích

A.  $2a^3$

B.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

C.  $a^3\sqrt{8}$

D.  $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

**Câu 30:** Cho hình lăng trụ tứ giác đều  $ABCD.A'B'C'D'$ , cạnh đáy bằng  $a$ , khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(A'BC)$  bằng  $\frac{a}{3}$ , tính thể tích lăng trụ

A.  $3\sqrt{3}a^3$                       B.  $\frac{3a^3}{4}$                       C.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$

#### 4. LĂNG TRỤ XIÊN

**Câu 31:** Cho lăng trụ xiên  $ABCA'B'C'$  đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ , biết cạnh bên là  $a\sqrt{3}$  và hợp với đáy  $ABC$  một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích lăng trụ.

A.  $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$                       B.  $a^3\sqrt{2}$                       C.  $2a^3\sqrt{3}$                       D.  $a^3\sqrt{8}$

**Câu 32:** Cho lăng trụ xiên  $ABCA'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ ; Hình chiếu  $AA'$  xuống  $ABC$  trùng với trung điểm  $H$  của  $BC$ . Góc giữa  $AA'$  và  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ .  $V_{LT} = ?$

A.  $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$                       B.  $\frac{2a^3}{5}$                       C.  $2a^3\sqrt{3}$                       D.  $\frac{a^3}{9}$

**Câu 33:** Cho lăng trụ xiên tam giác  $ABC A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $2a$ ; Hình chiếu của  $A'$  xuống  $(ABC)$  là tâm  $O$  đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  biết  $AA'$  hợp với đáy  $ABC$  một góc  $60$ . Tính thể tích lăng trụ.

A.  $2a^3\sqrt{3}$                       B.  $\frac{a^3}{2}$                       C.  $\frac{2a^3}{5}$                       D.  $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

**Câu 34:** Cho lăng trụ  $ABC A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ , đỉnh  $A'$  có hình chiếu trên  $(ABC)$  nằm trên đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$  biết mặt bên  $(BB'C'C)$  hợp với đáy  $ABC$  một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích lăng trụ.

A.  $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$                       B.  $\frac{2a^3}{3}$                       C.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$                       D.  $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

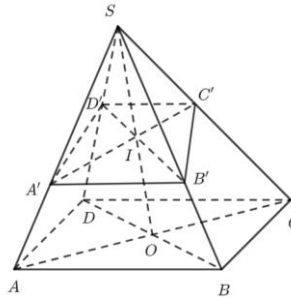
**Câu 35:** Hình hộp chữ nhật có 3 kích thước  $a, b, c$  thì đường chéo  $d$  có độ dài là:

A.  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$                       B.  $d = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$   
C.  $d = \sqrt{2a^2 + b^2 - c^2}$                       D.  $d = \sqrt{3a^2 + 3b^2 - 2c^2}$

**Một số công thức tính nhanh****Công thức 1:**

Cho khối chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Trên các đoạn  $SA, SB, SC, SD$  lấy lần lượt các điểm  $A', B', C', D'$  khác  $S$  sao cho  $a + c = b + d$ . Trong đó:

$$a = \frac{SA}{SA'}, b = \frac{SB}{SB'}, c = \frac{SC}{SC'}, d = \frac{SD}{SD'}$$



Khi đó ta có tỉ lệ thể tích là:

$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a + b + c + d}{4abcd}$$

**Công thức 2: Hai khối chóp chung chiều cao**

Công thức này rất đơn giản và hiển nhiên nhưng ta lại hay thường gặp trong giải toán. Cụ thể, nếu hai khối chóp  $(H)$  và  $(H')$  có diện tích hai đáy lần lượt là  $S$  và  $S'$ . Đồng thời có cùng chiều cao  $h$ . Thì ta có:

$$\frac{V_{H'}}{V_H} = \frac{S'}{S}$$

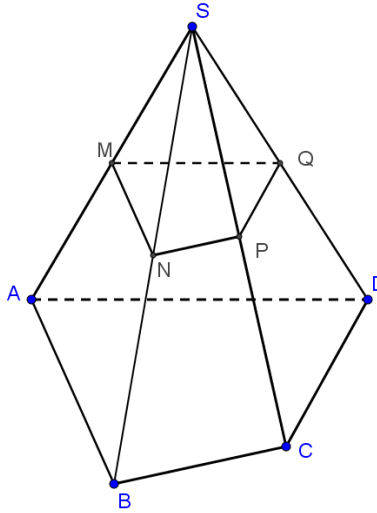
**Công thức 3: Hai khối đa diện đồng dạng tỉ số  $k$ .**

Hai khối đa diện  $(H)$  và  $(H')$  được gọi là đồng dạng tỉ số  $k$  nếu có 1 phép đồng dạng  $F$  tỉ số  $k$  biến  $(H)$  thành  $(H')$ . Khi đó giả sử  $AB$  là 1 cạnh của  $(H)$  và  $F(AB) = A'B'$  thì  $A'B' = kAB$ . Gọi  $V$  và  $V'$  lần lượt là thể tích của  $(H)$  và  $(H')$ , khi đó ta có tỉ số thể tích sau:

$$\frac{V'}{V} = k^3$$

**Ví dụ 1.** Cho khối chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SB, SC, SD$ . Gọi  $V$  là thể tích khối chóp  $S.MNPQ$ . Tính  $V$  biết thể tích khối chóp  $S.ABCD$  bằng 12.

**Lời giải:**



Ta có phép vị tự tâm  $S$  tỉ số 2 biến khối chóp  $S.MNPQ$  thành khối chóp  $S.ABCD$ .

$$\frac{V_{S.ABCD}}{V_{S.MNPQ}} = 2^3 \Rightarrow V_{S.MNPQ} = \frac{1}{8} \cdot 12 = \frac{3}{2}$$

**Ví dụ 2.** Cho khối tứ diện  $ABCD$  có thể tích  $V$ . Gọi  $V'$  là thể tích của khối tứ diện có bốn đỉnh là trọng tâm các mặt của khối tứ diện  $ABCD$ . Tính tỷ số  $\frac{V'}{V}$ .

**Lời giải:**

Gọi  $A', B', C', D'$  lần lượt là trọng tâm các mặt  $(BCD), (ACD), (ABD), (ABC)$ , ta có

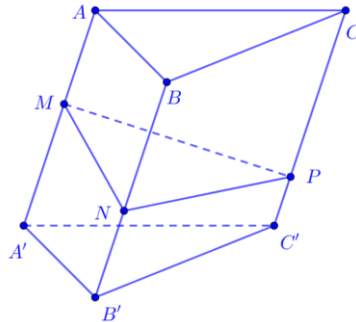
$$\frac{AA'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'D'}{AD} = \frac{1}{3}$$

nên khối tứ diện  $A'B'C'D'$  đồng dạng với khối tứ diện  $ABCD$  theo tỉ số  $k = \frac{1}{3}$ . Do đó

$$\frac{V'}{V} = k^3 = \frac{1}{27}$$

**Công thức 4: Khối lăng trụ tam giác**

Cho khối lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Trên các cạnh bên  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  lấy lần lượt các điểm  $M$ ,  $N$ ,  $P$ . Khi đó ta có tỉ số sau:

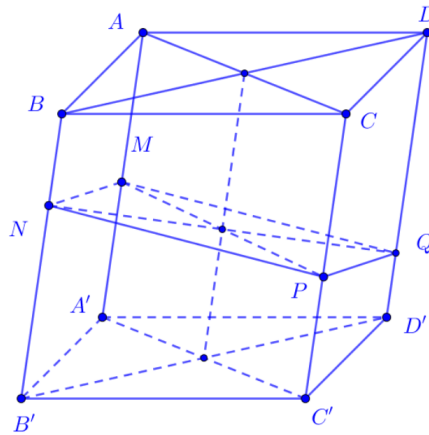


Trong đó  $a = \frac{AM}{AA'}$ ,  $b = \frac{BN}{BB'}$ ,  $c = \frac{CP}{CC'}$ , ta có

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{a+b+c}{3}$$

**Công thức 5: Khối lăng trụ đáy là hình bình hành (khối hộp)**

Cho khối hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Trên các cạnh bên  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  lấy lần lượt các điểm  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  sao cho  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  đồng phẳng. Khi đó ta có tỉ số sau:



Trong đó  $a = \frac{AM}{AA'}$ ,  $b = \frac{BN}{BB'}$ ,  $c = \frac{CP}{CC'}$ ,  $d = \frac{DQ}{DD'}$ , và  $a+c = b+d$ , ta có

$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{a+b+c+d}{4}$$

Thể tích khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$$

Thể tích khối bát diện đều có tất cả các cạnh bằng a

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$

Thể tích khối tứ diện đều có tất cả các cạnh bằng a

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

### PHẦN NÀY DÀNH HỌC SINH GHI CHÚ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## CHƯƠNG II : MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

### BÀI 1 : MẶT NÓN

#### A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

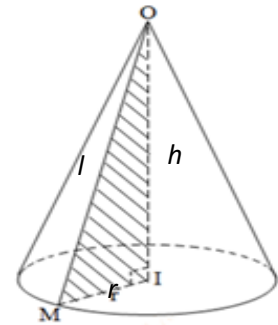
+ Diện tích xung quanh:  $S_{xq} = \pi Rl$

+ Diện tích đáy:  $S_{day} = \pi R^2$

+ Diện tích toàn phần:  $S_{tp} = S_{xq} + S_{day} = \pi R(l + R)$

+ Thể tích:  $V = \frac{1}{3} S_d \cdot h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$

+  $l^2 = h^2 + r^2$



#### B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1:** Một hình nón có đường cao bằng 20cm, bán kính đáy  $r = 25$ cm.

- Tính diện tích xung quanh hình nón và thể tích khối nón tương ứng.
- Một thiết diện đi qua đỉnh, cách tâm của đáy là 12cm. Tính diện tích thiết diện đó.

**Bài 2:** Cắt hình nón N đỉnh S cho trước bởi mặt phẳng đi qua trục của nó ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng  $a\sqrt{2}$

- Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích khối nón N.
- Cho một dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho mp(SBC) tạo với đáy hình nón một góc  $60^\circ$ . Tính diện tích tam giác SBC.

**Bài 3:** Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn  $(O; R)$  và góc ở đỉnh bằng  $2\alpha$ . Cho ABC là tam giác đều nội tiếp đường tròn đáy của hình nón.

- Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón
- Tính thể tích của hình chóp SABC và khoảng cách từ O đến mp(SBC)

**Bài 4 \*:** Cho hình nón đỉnh S, độ dài đường sinh là  $d$ , góc giữa đường sinh và mặt đáy là  $\alpha$ . Một mp(P) qua đỉnh hình nón hợp với mặt đáy góc  $60^\circ$  cắt hình nón theo hai đường sinh SA, SB. Tính diện tích tam giác SAB và khoảng cách từ O đến mp(SAB)

**Bài 5 \*:** Cho hình nón có thể tích  $96\pi(\text{cm}^3)$ , tỉ số giữa đường cao và đường sinh là  $4/5$ . Tính diện tích toàn phần của hình nón.

### C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Cho hình nón có đường cao bằng 20cm, bán kính đáy 25cm. Diện tích xung quanh hình nón đó là:

A.  $125\pi\sqrt{41} \text{ cm}^2$     B.  $120\pi\sqrt{41} \text{ cm}^2$     C.  $480\pi\sqrt{41} \text{ cm}^2$     D.  $768\pi\sqrt{41} \text{ cm}^2$

**Câu 2.** Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh  $a$ . Diện tích xung quanh hình nón đó là:

A.  $\frac{\pi a^3}{3}$     B.  $\frac{\pi a^2}{2}$     C.  $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{8}$     D.  $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{4}$

**Câu 3.** Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng  $a\sqrt{2}$ . Thể tích khối nón đó là

A.  $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{12}$     B.  $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$     C.  $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$     D.  $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$

**Câu 4.** Cho hình nón có thiết diện qua đỉnh S, tạo với đáy góc  $60^\circ$  là tam giác đều cạnh bằng 4cm. Thể tích của khối nón đó là:

A.  $9\pi \text{ cm}^3$     B.  $4\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$     C.  $3\pi \text{ cm}^3$     D.  $\pi \text{ cm}^3$

**Câu 5.** Một tứ diện đều cạnh  $a$  có đỉnh trùng với đỉnh của hình nón, ba đỉnh của đáy nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón là

A.  $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$     B.  $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$     C.  $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$     D.  $\pi a^3\sqrt{3}$

**Câu 6.** Cho tam giác đều ABC cạnh  $a$  quay xung quanh đường cao AH phát sinh ra một hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón đó là:

A.  $\frac{\pi a^2}{2}$     B.  $2\pi a^2$     C.  $\pi a^2$     D.  $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{4}$

**Câu 7.** Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông là  $b$ . Diện tích thiết diện qua đỉnh và cắt đáy theo cung  $120^\circ$  là:

A.  $\frac{b^2\sqrt{3}}{8}$

B.  $\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$

C.  $\frac{b^2\sqrt{15}}{4}$

D.  $\frac{b^2\sqrt{15}}{8}$

**Câu 8.** Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông là  $b$ . Diện tích thiết diện qua đỉnh và tạo với đáy góc  $60^\circ$  là:

A.  $\frac{b^2\sqrt{7}}{8}$

B.  $\frac{b^2\sqrt{7}}{16}$

C.  $\frac{b^2\sqrt{14}}{4}$

D.  $\frac{b^2\sqrt{14}}{8}$

**Câu 9.** Cho hình tứ diện đều  $S.ABC$ , cạnh bằng  $a$ . Hình nón có đỉnh  $S$ , đáy là hình tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ . Thể tích của hình nón là:

A.  $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}$

B.  $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{108}$

C.  $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{9}$

D.  $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$

**Câu 10.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  tất cả các cạnh bằng  $a$ . Hình nón có đỉnh  $S$ , đáy là hình tròn ngoại tiếp  $ABCD$ . Thể tích của hình nón là:

A.  $\frac{2\pi a^3\sqrt{2}}{3}$

B.  $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$

C.  $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{6}$

D.  $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{2}$

## BÀI 2 : MẶT TRỤ

### A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

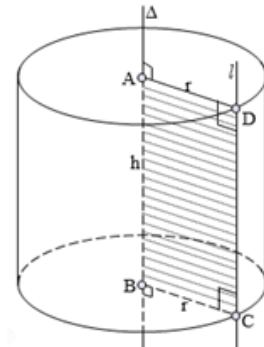
$$+ h = l$$

$$+ \text{Diện tích xung quanh: } S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi Rh$$

$$+ \text{Diện tích 2 đáy: } S_{2\text{day}} = 2\pi R^2$$

$$+ \text{Diện tích toàn phần: } S_{tp} = S_{xq} + S_{2\text{day}} = 2\pi R(l + R)$$

$$+ \text{Thể tích: } V = S_d \cdot h = \pi R^2 h = \pi R^2 l$$



### B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1:** Một mặt phẳng đi qua trục của hình trụ (T) cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh  $2R$ .

- Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ (T).
- Tính thể tích khối trụ (T).

**Bài 2:** Cho hình trụ (T) có bán kính đáy  $R$  và chiều cao là  $R\sqrt{3}$

- Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ (T).
- Tính thể tích của khối trụ giới hạn bởi hình trụ (T).

**Bài 3:** Cho hình trụ có bán kính đáy  $5\text{cm}$  và có khoảng cách giữa hai đáy bằng  $7\text{cm}$ .

- Tính diện tích xung quanh của hình trụ.
- Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục  $3\text{cm}$ . Tính diện tích thiết diện.

**Bài 4:** Cho hình trụ  $T$  có trục  $OO'$ , có thiết diện qua trục là một hình vuông. Một thiết diện song song với trục có diện tích bằng  $4\sqrt{2}a^2$  và khoảng cách từ trục đến thiết diện đó bằng  $a$ . Tính diện tích của thiết diện qua trục.

### C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông cạnh  $a$ . Diện tích xung quanh của hình trụ đó là:

A.  $4\pi a^2$

B.  $2\pi a^2$

C.  $\pi a^2$

D.  $\frac{\pi a^2}{2}$

**Câu 2.** Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn ngoại tiếp của hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng  $a$ . Thể tích của hình trụ đó là:

A.  $\frac{\pi a^3}{3}$

B.  $\frac{\pi a^3}{9}$

C.  $\pi a^3$

D.  $3\pi a^3$

**Câu 3.** Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn nội tiếp của hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng  $a$ . Thể tích của hình trụ đó là:

A.  $\frac{\pi a^3}{3}$

B.  $\frac{\pi a^3}{12}$

C.  $\pi a^3$

D.  $\frac{3\pi a^3}{16}$

**Câu 4.** Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn **ngoại tiếp** của hình lập phương cạnh  $a$ . Thể tích của hình trụ đó là:

A.  $\frac{\pi a^3}{2}$

B.  $\frac{\pi a^3}{6}$

C.  $\frac{2\pi a^3}{3}$

D.  $2\pi a^3$

**Câu 5.** Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn **nội tiếp** của hình lập phương cạnh  $a$ . Thể tích của hình trụ đó là:

A.  $\frac{\pi a^3}{4}$

B.  $\frac{\pi a^3}{12}$

C.  $\frac{\pi a^3}{3}$

D.  $\pi a^3$

**Câu 6.** Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn **ngoại tiếp** của hình lập phương cạnh  $a$ . Diện tích xung quanh của hình trụ đó là:

A.  $\frac{\pi\sqrt{2}a^2}{2}$

B.  $2\pi a^2$

C.  $\sqrt{2}\pi a^2$

D.  $2\sqrt{2}\pi a^2$

**Câu 7.** Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn **nội tiếp** của hình lập phương cạnh  $a$ . Diện tích xung quanh của hình trụ đó là:

A.  $\frac{\pi a^2}{2}$

B.  $\pi a^2$

C.  $2\pi a^2$

D.  $\pi a^3$

**Câu 8.** Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông cạnh  $a$ . A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy,  $AB = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$ . Góc tạo bởi AB với trục của hình trụ đó là :

A.  $30^\circ$

B.  $45^\circ$

C.  $60^\circ$

D.  $90^\circ$

**Câu 9.** Cho hình trụ có bán kính đáy và chiều cao cùng bằng  $a$ . A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy, AB tạo với đáy góc  $30^\circ$ . Khoảng cách giữa AB và trục hình trụ đó là:

A.  $a$

B.  $\frac{a}{2}$

C.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

D.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

**Câu 10.** Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước 50cm x 240cm, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50cm, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây) :

- Cách 1 : Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2 : Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu  $V_1$  là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và  $V_2$  là tổng thể tích của hai thùng

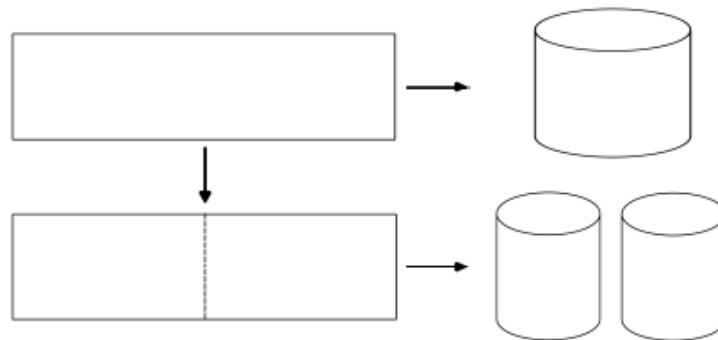
gò được theo cách 2. Tỉ số  $\frac{V_1}{V_2}$  là:

A.  $\frac{1}{2}$

B. 1

C. 2

D. 4



### BÀI 3. MẶT CẦU

#### A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

**1. Định nghĩa:** • **Mặt cầu:**  $S(O; R) = \{M | OM = R\}$  • **Khối cầu:**  $V(O; R) = \{M | OM \leq R\}$

**2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng**

Cho mặt cầu  $S(O; R)$  và mặt phẳng  $(P)$ . Gọi  $d = d(O; (P))$ .

• Nếu  $d < R$  thì  $(P)$  cắt  $(S)$  theo giao tuyến là đường tròn nằm trên  $(P)$ , có tâm  $H$  và bán kính  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ .

• Nếu  $d = R$  thì  $(P)$  tiếp xúc với  $(S)$  tại tiếp điểm  $H$ . ( $(P)$  đgl tiếp diện của  $(S)$ )

• Nếu  $d > R$  thì  $(P)$  và  $(S)$  không có điểm chung.

Khi  $d = 0$  thì  $(P)$  đi qua tâm  $O$  và đgl mặt phẳng kính, đường tròn giao tuyến có bán kính bằng  $R$  đgl đường tròn lớn.

**3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng**

Cho mặt cầu  $S(O; R)$  và đường thẳng  $\Delta$ . Gọi  $d = d(O; \Delta)$ .

• Nếu  $d < R$  thì  $\Delta$  cắt  $(S)$  tại hai điểm phân biệt.

• Nếu  $d = R$  thì  $\Delta$  tiếp xúc với  $(S)$ . ( $\Delta$  đgl tiếp tuyến của  $(S)$ ).

• Nếu  $d > R$  thì  $\Delta$  và  $(S)$  không có điểm chung.

**4. Mặt cầu ngoại tiếp – nội tiếp**

|                     | Mặt cầu ngoại tiếp                                    | Mặt cầu nội tiếp                                                |
|---------------------|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| <b>Hình đa diện</b> | Tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu | Tất cả các mặt của hình đa diện đều tiếp xúc với mặt cầu        |
| <b>Hình trụ</b>     | Hai đường tròn đáy của hình trụ nằm trên mặt cầu      | Mặt cầu tiếp xúc với các mặt đáy và mọi đường sinh của hình trụ |
| <b>Hình nón</b>     | Mặt cầu đi qua đỉnh và đường tròn đáy của hình nón    | Mặt cầu tiếp xúc với mặt đáy và mọi đường sinh của hình nón     |

**5. Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện**

- Cách 1: Nếu  $(n - 2)$  đỉnh của đa diện nhìn hai đỉnh còn lại dưới một góc vuông thì tâm của mặt cầu là trung điểm của đoạn thẳng nối hai đỉnh đó.
- Cách 2: Để xác định tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
  - Xác định trục  $\Delta$  của đáy ( $\Delta$  là đường thẳng vuông góc với đáy tại tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy).
  - Xác định mặt phẳng trung trực (P) của một cạnh bên.
  - Giao điểm của (P) và  $\Delta$  là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

**6. Diện tích – Thể tích**

|           |                          |
|-----------|--------------------------|
| Diện tích | $S = 4\pi R^2$           |
| Thể tích  | $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ |

**B. BÀI TẬP TỰ LUẬN****Dạng 1: Chứng minh các điểm cùng thuộc mặt cầu**

+ Dựa định nghĩa:  $M \in S(O; R) \Leftrightarrow OM = R$

+  $A, B$  cố định,  $\angle AMB = 90^\circ \Rightarrow M \in (S)$  có đường kính  $AB$

**Bài 1:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $B$ ,  $AB = a$ . Biết  $SA = 2a$  và  $SA \perp (ABC)$ . Gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là hình chiếu của  $A$  trên  $SB$ ,  $SC$ .

Chứng minh:

- a)  $A, B, C, S$  cùng nằm trên một mặt cầu. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu đó.
- b) Các điểm  $A, B, C, H, K$  cùng nằm trên một mặt cầu. Tính diện tích mặt cầu đó.

**Bài 2:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông,  $SA \perp (ABCD)$  và  $AB=SA=a$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $A$  và vuông góc với  $SC$ ,  $(P)$  lần lượt cắt  $SB, SC, SD$  tại  $H, I$  và  $K$ . Chứng minh các điểm  $A, B, C, D, H, I, K$  cùng nằm trên một mặt cầu. Tính diện tích của mặt cầu đó.

**Dạng 2: Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, lăng trụ**

+ Điều kiện hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp; cách xác định tâm

+ Điều kiện lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp.

**Bài 1:** Xác định tâm và tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $SABC$  có  $SA, SB, SC$  vuông góc với nhau từng đôi một và  $SA=a, SB=b, SC=c$ .

**Bài 2:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a$ ,  $SB=2a$ . Xác định tâm và tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp.

**Bài 3:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a$  và  $ASB = \alpha$ . Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

**Bài 4:** Cho tứ diện  $SABC$  có  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ . Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện biết  $SA=2a$ ,  $SA \perp (ABC)$

**Bài 5:** Cho hình chóp tam giác đều  $SABC$ ,  $AB=a$  và mặt bên hợp với mặt đáy góc  $\alpha$ . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

**Bài 6\*:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SAB$  là tam giác đều nằm trên mp vuông góc với mp  $(ABCD)$ . Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

**Bài 7\*:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $ABC$  và  $DBC$  là các tam giác đều có cạnh bằng  $a$  và nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

**Bài 8\*:** Cho tứ diện  $SABC$  có  $SBC$  và  $ABC$  là các tam giác đều cạnh  $a$ . Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện biết mp  $(SBC)$  hợp với mp  $(ABC)$  góc  $60^\circ$ .

**C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**Câu 1.** Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh  $a$  là:

A.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}$

B.  $\frac{3\pi a^3 \sqrt{3}}{2}$

C.  $4\sqrt{3}\pi a^3$

D.  $\frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$

**Câu 2.** Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc nhau và có độ dài lần lượt là  $3a, 4a, 12a$ . Thể tích của khối cầu ngoại tiếp  $OABC$  là

A.  $\frac{169\pi}{3}$

B.  $\frac{2197\pi}{2}$

C.  $\frac{2197\pi}{6}$

D.  $\frac{2197\pi}{3}$

**Câu 3.** Cho hình chóp SABC có đáy là  $\Delta ABC$  vuông tại B,  $AB = a$ ,  $BC = a\sqrt{3}$ .  $SA \perp (ABC)$ , SB tạo với đáy 1 góc  $60^\circ$ . Thể tích khối cầu ngoại tiếp S.ABC là:

A.  $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$

B.  $\frac{7\sqrt{7}\pi a^3}{2}$

C.  $\frac{7\sqrt{7}\pi a^3}{6}$

D.  $\frac{4\pi a^3}{3}$

**Câu 4.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông, cạnh  $a$ . (SAB) và (SAD) cùng  $\perp$  đáy. SC tạo với đáy góc  $60^\circ$ . Thể tích khối cầu ngoại tiếp S.ABCD là:

A.  $\frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}$

B.  $\frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$

C.  $\frac{32\sqrt{2}\pi a^3}{3}$

D.  $\frac{4\pi a^3}{3}$

**Câu 5.** Cho hình chóp S.ABC có  $\Delta ABC$  là tam giác đều, cạnh  $a$ ,  $SA \perp (ABC)$ , (SBC) tạo với đáy góc  $60^\circ$ . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp S.ABC là:

A.  $\frac{4}{3}\pi a^2$

B.  $4\pi a^2$

C.  $12\pi a^2$

D.  $3\pi a^2$

**Câu 6.** Cho hình chóp đều S.ABC, cạnh bên bằng  $a$  tạo với đáy góc  $60^\circ$ . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp S.ABC là:

A.  $\frac{4}{3}\pi a^2$

B.  $4\pi a^2$

C.  $\frac{4}{9}\pi a^2$

D.  $9\pi a^2$

**Câu 7.** Cho hình chóp đều S.ABCD, cạnh đáy bằng  $a$ . Mặt bên tạo với đáy góc  $60^\circ$ . Thể tích khối cầu ngoại tiếp S.ABCD là:

A.  $\frac{125\pi a^3}{144}$

B.  $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{16}$

C.  $\frac{125\pi a^3}{48}$

D.  $\frac{125\sqrt{3}\pi a^3}{144}$

**Câu 8.** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho là:

A.  $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$

B.  $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$

C.  $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$

D.  $V = \frac{5\pi}{3}$

**Câu 9.** Cho tứ diện ABCD, I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD, IJ. M là điểm thỏa điều kiện  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = a$ , với  $a$  là độ dài cho trước. Phát biểu nào sau đây đúng

A. M thuộc mặt cầu tâm O, bán kính  $\frac{a}{4}$

B. M thuộc mặt cầu tâm O, bán kính  $\frac{a}{2}$

C. M thuộc mặt cầu tâm O, bán kính  $\frac{a}{3}$

D. M thuộc mặt cầu đường kính IJ

**Câu 10.** Hình cầu (S) có bán kính  $R$ . Mp ( $\alpha$ ) cắt (S) theo đường tròn bán kính  $r$  và diện tích bằng nửa diện tích hình tròn lớn của (S). Tính tỉ số  $\frac{R}{r}$

A.  $\frac{R}{r} = 2\sqrt{2}$

B.  $\frac{R}{r} = 2\sqrt{3}$

C.  $\frac{R}{r} = \sqrt{2}$

D.  $\frac{R}{r} = \sqrt{3}$

### KIỂM TRA GHK 1 2018-2019

#### TRẮC NGHIỆM: ( 7,5 điểm)

**Câu 1:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh  $2a$  và thể tích bằng  $a^3$ . Tính chiều cao  $h$  của hình chóp đã cho.

A.  $h = \frac{\sqrt{3}a}{6}$ .

B.  $h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ .

C.  $h = \frac{\sqrt{3}a}{3}$ .

D.  $h = \sqrt{3}a$ .

**Câu 2:** Hàm số  $y = \sqrt{x - x^2}$  nghịch biến trên khoảng

A.  $(1; +\infty)$ .

B.  $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ .

C.  $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ .

D.  $(-\infty; 0)$ .

**Câu 3:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^2 + \frac{2}{x}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$  là

A.  $\min_{(0; +\infty)} y = 3$ .

B.  $\min_{(0; +\infty)} y = 1$ .

C.  $\min_{(0; +\infty)} y = -1$ .

D. Không tồn tại  $\min_{(0; +\infty)} y$ .

**Câu 4:** Cho hàm số  $y = (m+1)x^4 - mx^2 + 3$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số có ba điểm cực trị.

A.  $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$ .

B.  $m \in (-1; 0)$ .

C.  $m \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$ .

D.  $m \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$ .

**Câu 5:** Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{\sqrt{4-x^2}}$  là

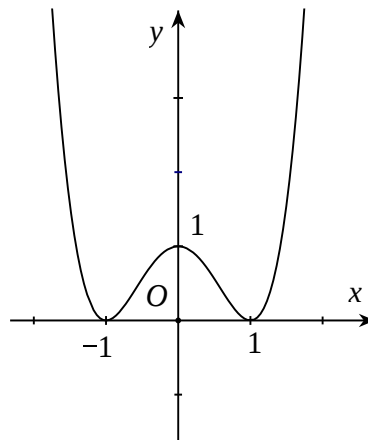
A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

**Câu 6:** Hình dưới là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây:



A.  $y = x^4 - 2x^2 - 1$ .    B.  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ .    C.  $y = -x^4 - 2x^2 + 1$ .    D.  $y = -2x^4 + 3x^2 - 1$ .

**Câu 7:** Đồ thị các hàm số  $y = \frac{4x+4}{x-1}$  và  $y = x^2 - 1$  cắt nhau tại bao nhiêu điểm?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

**Câu 8:** Cho hình lăng trụ đứng có diện tích đáy là  $3a^2$ , độ dài cạnh bên bằng  $2a$ . Thể tích khối lăng trụ này bằng

A.  $2a^3$ .

B.  $a^3$ .

C.  $3a^3$ .

D.  $6a^3$ .

**Câu 9:** Tính theo  $a$  thể tích khối lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình thoi cạnh  $a$ , góc  $BAD$  bằng  $60^\circ$  và cạnh bên  $AA'$  bằng  $a$ .

A.  $\frac{9}{2}a^3$ .

B.  $\frac{1}{2}a^3$ .

C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$ .

D.  $\sqrt{3}a^3$ .

**Câu 10:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$  và  $SA$  vuông góc với đáy. Góc tạo bởi mặt phẳng  $(SBC)$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $30^\circ$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  là

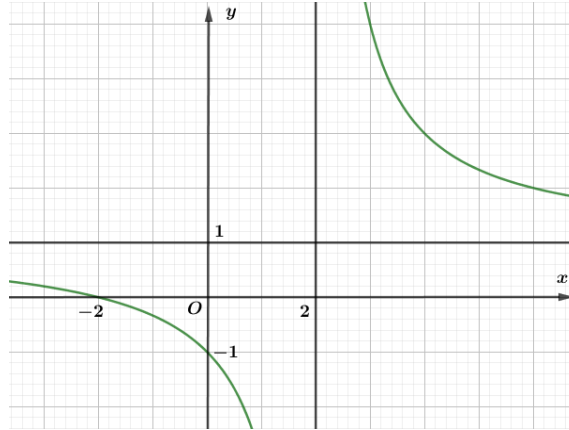
A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ .

B.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ .

C.  $\frac{a^3}{4}$ .

D.  $\frac{a^3}{12}$ .

**Câu 11:** Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số  $y = \frac{ax+2}{cx+b}$  với  $a, b, c$  là các số thực.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

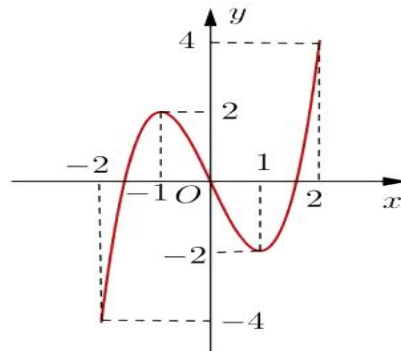
A.  $a = 2; b = 2; c = -1$ .

B.  $a = 1; b = 2; c = 1$ .

C.  $a = 1; b = -2; c = 1$ .

D.  $a = 1; b = 1; c = -1$ .

**Câu 12:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên đoạn  $[-2; 2]$  và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $|f(x)| = m$  có 6 nghiệm thực phân biệt là



A.  $0 \leq m \leq 2$ .

B.  $0 < m < 2$ .

C.  $m < 0$ .

D.  $m > 2$ .

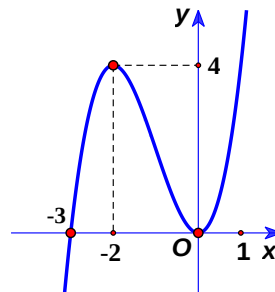
**Câu 13:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 4x + m = 2\sqrt{5 + 4x - x^2} + 5$  có nghiệm.

- A.  $m \geq -1$ .      B.  $-1 \leq m \leq 2\sqrt{3}$ .      C.  $m \geq 0$ .      D.  $0 \leq m \leq 15$ .

**Câu 14:** Số giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc  $[-2; 4]$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + (m + 1)x^2 + 3x - 1$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  là

- A. 3.      B. 0.      C. 2.      D. 5.

**Câu 15:** Biết rằng đồ thị hàm số  $y = x^3 + 3x^2$  có dạng như hình vẽ



Hỏi đồ thị hàm số  $y = |x^3 + 3x^2|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3.      B. 1.      C. 2.      D. 0.

**TỰ LUẬN: ( 2,5 điểm )**

1/ Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số sau:

a/  $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$ .

b/  $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .

2/ Tìm  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + mx - 2$  đạt cực tiểu tại  $x = 2$ .

## KIỂM TRA GHK 1 2019-2020

## I/ TRẮC NGHIỆM: ( 7 điểm )

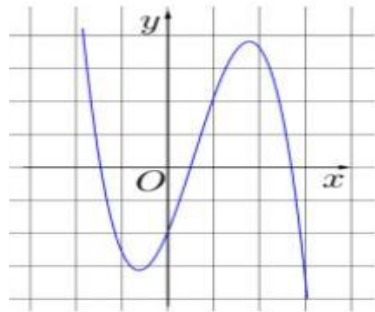
**Câu 1:** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$ .

B.  $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$ .

C.  $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$ .

D.  $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$ .



**Câu 2:** Cho hàm số  $y = \frac{x}{x-1}$ . Mệnh đề nào **đúng**.

A. Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .B. Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ .C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; 1)$ .D. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$ .

**Câu 3:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x - m$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .

A.  $[-2; 2]$ .

B.  $(-\infty; -2]$ .

C.  $(-\infty; 2)$ .

D.  $[2; +\infty)$ .

**Câu 4:** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$  trên đoạn  $[-1; 2]$ .

A.  $\max_{[-1; 2]} y = 11$ .

B.  $\max_{[-1; 2]} y = 6$ .

C.  $\max_{[-1; 2]} y = 15$ .

D.  $\max_{[-1; 2]} y = 10$ .

**Câu 5:** Gọi  $M, n$  lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số  $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ . Khi đó giá trị của biểu thức  $M^2 - 2n$  bằng

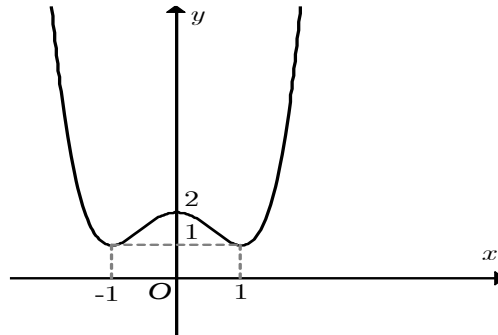
- A. 7.                      B. 6.                      C. 9.                      D. 8.

**Câu 6:** Đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 2.                      B. 1.                      C. 0.                      D. 3.

**Câu 7:** Đồ thị hình bên dưới là của hàm số nào?

- A.  $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ .    B.  $y = x^4 - 4x^2 + 2$ .    C.  $y = x^4 - 2x^2 + 3$ .    D.  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ .



**Câu 8:** Khối đa diện đều loại  $\{5;3\}$  là khối

- A. Hai mươi mặt đều.    B. Lập phương.    C. Mười hai mặt đều.    D. Bát diện đều.

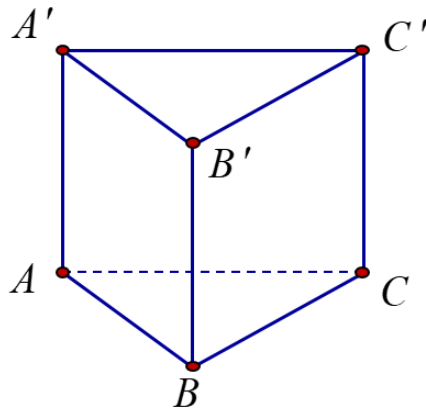
**Câu 9:** Tìm  $m$  để đường thẳng  $y = 4m$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^4 - 8x^2 + 3$  tại bốn điểm phân biệt.

- A.  $-\frac{13}{4} < m < \frac{3}{4}$ .    B.  $m \leq \frac{3}{4}$ .    C.  $m \geq -\frac{13}{4}$ .    D.  $-\frac{13}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$ .

**Câu 10:** Tìm hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số  $y = x^3 - 4x^2 + 6$  và  $y = -4x + 9$ ?

- A.  $x = 3$ .                      B.  $y = 3$ .                      C.  $x = -8$ .                      D.  $x = 1$ .

**Câu 11:** Cho khối lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có cạnh đáy bằng 2, diện tích tam giác  $A'BC$  bằng 3. Thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  là



A.  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ .

B.  $\sqrt{2}$ .

C.  $2\sqrt{5}$ .

D.  $3\sqrt{2}$ .

**Câu 12:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $1;3$  và có bảng biến thiên như sau

| $x$  | 1  | 2  | 3  |
|------|----|----|----|
| $y'$ | +  | 0  | -  |
| $y$  | -6 | -1 | -3 |

Tổng các giá trị  $m \in \mathbb{Z}$  sao cho phương trình  $f(x-1) = \frac{m}{x^2 - 6x + 12}$  có hai nghiệm phân biệt trên đoạn  $2;4$  bằng

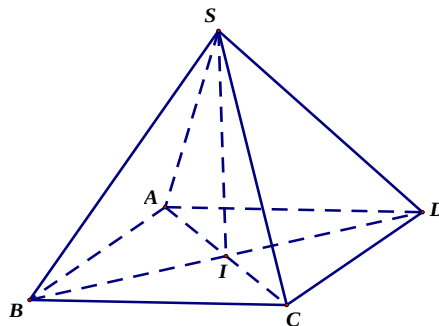
A. -72.

B. -294.

C. -75.

D. -297.

**Câu 13:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a$  và mặt bên tạo với đáy một góc  $45^\circ$ . Thể tích  $V$  khối chóp  $S.ABCD$  là



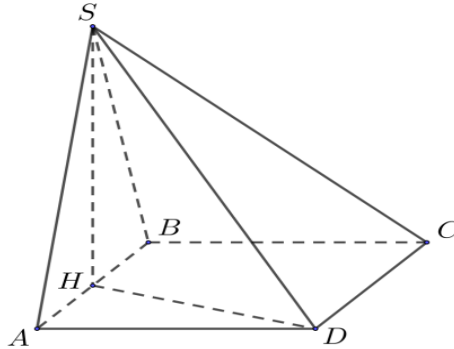
A.  $V = \frac{a^3}{9}$

B.  $V = \frac{a^3}{6}$ .

C.  $V = \frac{a^3}{2}$ .

D.  $V = \frac{1}{24}a^3$ .

**Câu 14:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SD = \frac{3a}{2}$ , hình chiếu vuông góc của  $S$  trên mặt phẳng  $(ABCD)$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Tính theo  $a$  thể tích khối chóp  $S.ABCD$ .



A.  $\frac{2a^3}{3}$ .

B.  $\frac{a^3}{2}$ .

C.  $\frac{a^3}{3}$ .

D.  $\frac{a^3}{4}$ .

## II/ TỰ LUẬN: ( 3 điểm )

1/ Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số sau:

a /  $y = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2$

b/  $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{1 - x}$

2/ Cho hàm số:  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc  $k = 9$ ?

3/ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4 \text{ đồng biến trên tập xác định?}$$

## ĐỀ GIỮA HỌC KỲ 1-2020

**Câu 1:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{4-x}$  là:

A.  $2\sqrt{3}$ .

B.  $\sqrt{6}$ .

C.  $-2$ .

D.  $1$ .

**Câu 2:** Cho khối lập phương. Mệnh đề nào sau đây là đúng.

A. Là khối đa diện đều loại  $\{3;4\}$ .

B. Số đỉnh của khối lập phương bằng 6.

C. Số mặt của khối lập phương bằng 6.

D. Số cạnh của khối lập phương bằng 8.

**Câu 3:** Hàm số  $y = x^4 - 4x^2 - 3$  có giá trị cực đại bằng:

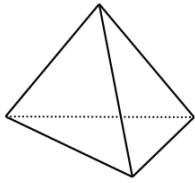
A.  $-7$ .

B.  $-3$ .

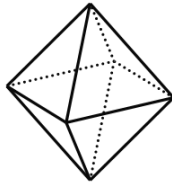
C.  $0$ .

D.  $\sqrt{2}$ .

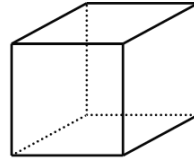
**Câu 4:** Hình đa diện nào dưới đây không là hình đa diện đều



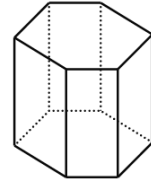
A. Tứ diện đều.



B. Bát diện đều.



C. Hình lập phương.



D. Lăng trụ lục giác đều.

**Câu 5:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{2x-1}{3-x}$  trên đoạn  $[0; 2]$  là:

A. 2.

B. 0.

C.  $-\frac{1}{3}$ .

D. 3.

**Câu 6:** Đồ thị hàm số:  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  là (C). Biết tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng

(d):  $y = -3x + 15$ . Phương trình tiếp tuyến đó là

A.  $y = -3x + 11$  và  $y = -3x - 1$ .B.  $y = 3x + 11$ .C.  $y = -3x - 1$ .D.  $y = -3x + 11$ .

**Câu 7:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $6a$ ,  $SA$  vuông góc với đáy, góc  $SBA = 60^\circ$ . Tính thể tích của khối chóp  $S.ABCD$ .

A.  $72a^3$ .B.  $72\sqrt{3}a^3$ .C.  $216\sqrt{3}a^3$ .D.  $216a^3$ .

**Câu 8:** Hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$  nghịch biến trên khoảng nào?

A.  $\mathbb{R}$ .B.  $(-\infty; -1)$ .C.  $(-1; 1)$ .D.  $(-1; 3)$ .

**Câu 9:** Hàm số  $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$  nghịch biến trên khoảng nào?

A.  $(-\infty; -1)$ .B.  $(2; +\infty)$ .C.  $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ .D.  $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ .

**Câu 10:** Cho hàm số  $y = x + \frac{4}{x}$ . Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $(0; +\infty)$  bằng

A. 4.

B. 2.

C. -2.

D. -4.

**Câu 11:** Hàm số nào sau đây có giá trị lớn nhất trên tập xác định?

A.  $y = 2x^4 - x^2 + 1$ .B.  $y = \frac{x-2}{x+1}$ .C.  $y = -x^4 + 3x^2 + 2$ .D.  $y = -x^3 + 2x^2 + 4x - 2$ .

**Câu 12:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |     |     |     |      |     |           |
|------|-----------|-----|-----|-----|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |     | $0$ |     | $1$  |     | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$ |     | $-$ | $0$  | $+$ |           |
| $y$  | $0$       |     | $2$ |     | $-2$ |     | $+\infty$ |

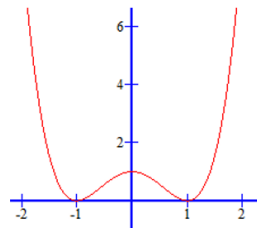
Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

**Câu 13:** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x + 6}$  có bao nhiêu tiệm cận ngang và tiệm cận đứng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

**Câu 14:** Đồ thị dưới đây là của hàm số nào?



- A.  $y = -x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ . B.  $y = x^4 - 2x^2$ .  
C.  $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ . D.  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ .

**Câu 15:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác  $ABC$  có  $CB = 2a\sqrt{3}$ ,  $CA = 2a$  và góc  $ACB$  bằng  $30^\circ$ ,  $SA$  vuông góc với đáy và góc giữa  $SC$  và  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích của khối chóp  $S.ABC$

- A.  $3a^3$ . B.  $2a^3$ . C.  $9a^3$ . D.  $6a^3$ .

**Câu 16:** Đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 2}$  có bao nhiêu tiệm cận ngang và tiệm cận đứng

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

**Câu 17:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật cạnh  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{3}$ . Biết rằng tam giác  $SAB$  cân tại  $S$  và nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách giữa  $AB$  và  $SC$  bằng  $\frac{3a}{2}$ . Tính thể tích của khối chóp  $S.ABCD$

- A.  $\sqrt{3}a^3$ . B.  $2\sqrt{3}a^3$ . C.  $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$ . D.  $\sqrt{3}a^3$ .

**Câu 18:** Với giá trị nào của tham số  $m$  thì hàm số  $y = x^3 - 6mx^2 + 2$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ ?

- A.  $m = 0$ . B.  $m \geq 0$ . C.  $m < 0$ . D.  $m > 0$ .

**Câu 19:** Với giá trị nào của tham số  $m$  thì hàm số  $y = x^3 - mx^2 + x - 3$  đạt cực đại tại  $x = -1$ ?

A.  $m \in \mathbb{R}$ .

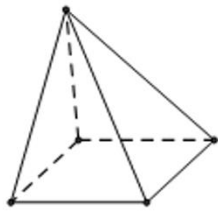
B.  $m = -2$ .

C.  $m \in \emptyset$ .

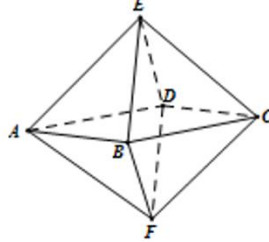
D.  $m \neq -2$ .

**Câu 20:** Hình nào dưới đây không phải là hình đa diện lồi

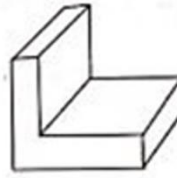
Hình 1.



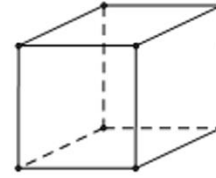
Hình 2.



Hình 3.



Hình 4.



A. Hình 4.

B. Hình 3.

C. Hình 2.

D. Hình 1.

**Câu 21:** Khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng  $a$ , chiều cao bằng  $3a$  thì có thể tích bằng:

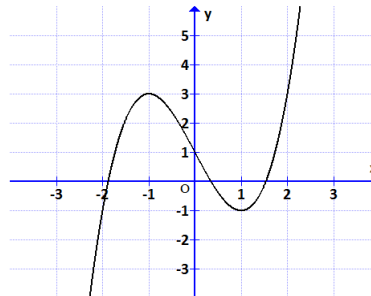
A.  $a^3\sqrt{3}$ .

B.  $\frac{a^3}{3}$ .

C.  $a^3$ .

D.  $3a^3$ .

**Câu 22:** Đồ thị sau đây là của hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$ . Với giá trị nào của tham số  $m$  thì phương trình  $x^3 - 3x - m = 0$  có đúng một nghiệm thực phân biệt.



A.  $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$ .

B.  $-2 < m < 2$ .

C.  $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$ .

D.  $-1 < m < 3$ .

**Câu 23:** Khối lập phương có cạnh bằng  $a$  có thể tích bằng:

A.  $a^3\sqrt{3}$ .

B.  $a^3$ .

C.  $\frac{a^3}{3}$ .

D.  $3a^3$ .

**Câu 24:** Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+1}$ . Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Tập xác định của hàm số là  $D = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ .

B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; +\infty)$ .

D. Hàm số có cực trị.

**Câu 25:** Cho lăng trụ đứng  $A'B'C'D'.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a\sqrt{3}$ . Tính thể tích của khối lăng trụ  $A'B'C'D'.ABCD$ .

A.  $\frac{9a^3\sqrt{3}}{4}$ .

B.  $\frac{3a^3}{4}$ .

C.  $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$ .

D.  $\frac{9a^3}{4}$ .

**Câu 26:** Bảng biến thiên dưới đây là của hàm số nào?

|      |           |   |           |   |           |
|------|-----------|---|-----------|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |   | $-1$      |   | $+\infty$ |
| $y'$ |           | + |           | + |           |
| $y$  | 2         |   | $+\infty$ |   | $-\infty$ |

A.  $y = \frac{2x-3}{x-1}$ .

B.  $y = \frac{2x+3}{x+1}$ .

C.  $y = \frac{-2x-3}{x+1}$ .

D.  $y = \frac{2x-3}{x+1}$ .

**Câu 27:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ , hình chiếu của  $A'$  trên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với trọng tâm  $O$  của tam giác  $ABC$ , góc giữa mặt bên  $(ABB'A')$  và mặt phẳng đáy bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ .

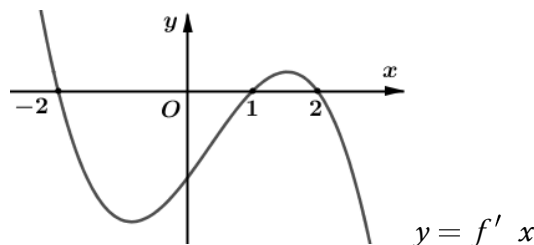
A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ .

B.  $a^3\sqrt{3}$ .

C.  $3a^3\sqrt{3}$ .

D.  $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ .

**Câu 28:** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên dưới và  $f(-2) = f(2) = 0$



Hàm số  $g(x) = [f(x)]^2$  nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A.  $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ .

B.  $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ .

C.  $-2; -1$ .

D.  $-1; 1$ .

**Câu 29:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2 - 2x$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $g(x) = f(x^2) - 8x$  có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

**Câu 30:** Cho phương trình  $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}$ . Có bao nhiêu giá trị  $m$  nguyên dương để phương trình có nghiệm?

A. vô số.

B. 9.

C. 10.

D. 6.

## B - PHẦN TỰ LUẬN

**Câu 1:** Khảo sát sự biến thiên và tìm cực trị hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 2$

**Câu 2:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x+m}{x+1}$  đồng biến trên từng khoảng xác định.

**Câu 3:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$  trên  $(1; +\infty)$

**Câu 4:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  có  $BC = 3a$ ,  $CA = 5a$ ,  $SA$  vuông góc với mp( $ABC$ ) và góc giữa  $SB$  và mp( $ABC$ ) bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích của khối chóp  $S.ABC$ .

### KIỂM TRA HK1 2018-2019

#### I/ TRẮC NGHIỆM: ( 6 điểm )

**Câu 1:** Hàm số nào sau đây đồng biến trên  $\mathbb{R}$ ?

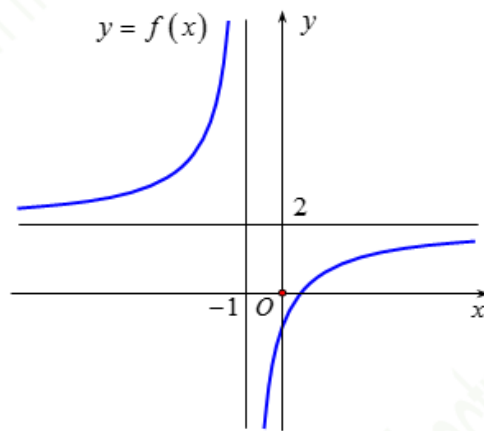
A.  $y = \frac{x-1}{x-2}$ .

B.  $y = x^3 - x^2 + 2x + 3$ .

C.  $y = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 2$ .

D.  $y = x^3 - x^2 - 3x + 1$ .

**Câu 2:** Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A.  $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ .

B.  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ .

C.  $y = \frac{-2x+1}{x-1}$ .

D.  $y = \frac{2x-1}{x+1}$ .

**Câu 3:** Đạo hàm của hàm số  $y = \sin 2x + 3^x$  là

A.  $y' = 2 \cos 2x + 3^x \ln 3$ .

B.  $y' = 2 \cos 2x + x3^{x-1}$ .

C.  $y' = -\cos 2x + 3^x$ .

D.  $y' = -2 \cos 2x - 3^x \ln 3$ .

**Câu 4:** Cho hình nón ( $N$ ) có bán kính đáy bằng  $a$  và diện tích xung quanh  $S_{xp} = 2\pi a^2$ . Tính thể tích  $V$  của khối chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  nội tiếp đáy của khối nón ( $N$ ) và đỉnh  $S$  trùng với đỉnh của khối nón ( $N$ )?

A.  $V = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$ .      B.  $V = \frac{2\sqrt{5}a^3}{3}$ .      C.  $V = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$ .      D.  $V = 2\sqrt{3}a^3$ .

**Câu 5:** Cho hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 7x + 5$  ( $C$ ). Tìm trên ( $C$ ) những điểm có hệ số góc tiếp tuyến tại điểm đó bằng  $-2$ ?

A.  $(1; 7); (-1; -9)$ .      B.  $(1; 7); (3; -1)$ .      C.  $(-1; -9); (3; -1)$ .      D.  $(1; 7); (-3; -97)$ .

**Câu 6:** Cho  $a = \log_2 5$ ,  $b = \log_2 9$ . Biểu diễn của  $P = \log_2 \frac{40}{3}$  theo  $a$  và  $b$  là

A.  $P = 3 + a - 2b$       B.  $P = 3 + a - \frac{1}{2}b$       C.  $P = \frac{3a}{2b}$       D.  $P = 3 + a - \sqrt{b}$

**Câu 7:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^4 + 2x^2 - 1$  tại điểm có tung độ tiếp điểm bằng 2 là

A.  $y = 8x - 6, y = -8x + 6$ .      B.  $y = 40x - 57$ .  
C.  $y = 8x - 8, y = -8x + 8$ .      D.  $y = 8x - 6, y = -8x - 6$ .

**Câu 8:** Trong các hàm số được cho bởi các phương án A, B, C, D dưới đây, đồ thị của hàm số nào không có đường tiệm cận?

A.  $y = \frac{1}{x}$ .      B.  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ .      C.  $y = \frac{2x+1}{2-x}$ .      D.  $y = x^4 - 3x^2 + 2$ .

**Câu 9:** Tập xác định của hàm số  $y = x^\pi + (x^2 - 1)^e$  là

A.  $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ .      B.  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ .      C.  $(0; +\infty)$ .      D.  $(1; +\infty)$ .

**Câu 10:** Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc và  $OA = a, OB = a\sqrt{3}, OC = 2a$ . Tính thể tích khối tứ diện đó?

A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .      B.  $a^3\sqrt{3}$ .      C.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ .      D.  $a^3$ .

**Câu 11:** Các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{mx+3}{\sqrt{mx^2-5}}$  có hai đường tiệm cận ngang là

- A.  $m < 0$ .      B.  $m > 0$ .      C.  $m > \sqrt{5}$ .      D.  $m \geq 0$ .

**Câu 12:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x$  có giá trị cực đại và cực tiểu lần lượt là  $y_1, y_2$ . Khi đó

- A.  $2y_1 - y_2 = -6$ .      B.  $2y_1 - y_2 = 6$ .      C.  $y_1 - y_2 = -4$ .      D.  $y_1 + y_2 = 4$ .

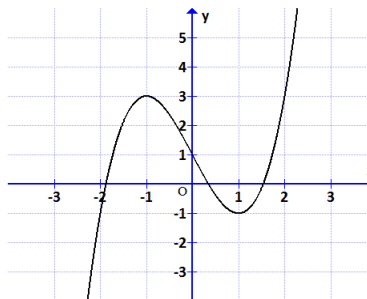
**Câu 13:** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng  $a$  và chiều cao bằng  $h$ . Tính thể tích  $V$  của khối lăng trụ tam giác đều nội tiếp hình trụ đã cho?

- A.  $V = \frac{3\sqrt{3}a^2h}{4}$ .      B.  $V = \frac{3\sqrt{3}\pi a^2h}{4}$ .  
C.  $V = \frac{\pi}{3} \left( h^2 + \frac{4a^2}{3} \right) \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{3}}$ .      D.  $V = \frac{\sqrt{3}a^2h}{4}$ .

**Câu 14:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 2\cos x - \frac{4}{3}\cos^3 x$  trên  $[0; \pi]$  là

- A.  $\max_{[0; \pi]} y = \frac{2}{3}$ .      B.  $\max_{[0; \pi]} y = 0$ .      C.  $\max_{[0; \pi]} y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .      D.  $\max_{[0; \pi]} y = \frac{10}{3}$ .

**Câu 15:** Đồ thị sau đây là của hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$ . Với giá trị nào của tham số  $m$  thì phương trình  $x^3 - 3x - m = 0$  có ba nghiệm thực phân biệt.



- A.  $-2 < m < 2$ .      B.  $-1 < m < 3$ .      C.  $-2 \leq m < 2$ .      D.  $-2 < m < 3$ .

**Câu 16:** Hình nón có đường sinh  $l = 2a$  và bán kính đáy bằng  $a$ . Diện tích xung quanh của hình nón bằng bao nhiêu?

A.  $\frac{2}{3}\pi a^2$ .

B.  $4\pi a^2$ .

C.  $\pi a^2$ .

D.  $2\pi a^2$ .

**Câu 17:** Cho mặt cầu có diện tích bằng  $\frac{8\pi a^2}{3}$ . Khi đó, bán kính mặt cầu bằng

A.  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

B.  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

C.  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ .

D.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 18:** Cho phương trình  $9^{x^2+x-1} - 10 \cdot 3^{x^2+x-2} + 1 = 0$ . Tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng

A. 0.

B. 1.

C. -2.

D. 2.

**Câu 19:** Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực  $\mathbb{R}$ ?

A.  $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ .

B.  $y = \log_{\frac{\pi}{4}}(2x^2 + 1)$ .

C.  $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$ .

D.  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ .

**Câu 20:** Tích tất cả các nghiệm của phương trình  $(1 + \log_2 x) \log_4 2x = 2$  bằng

A.  $\frac{1}{8}$ .

B. 4.

C.  $\frac{1}{4}$ .

D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 21:** Một hàm số trong những hàm số dưới đây đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ . Đó là hàm số nào?

A.  $y = x^3 + x^2 + 1$ .

B.  $y = x^4 + x^2 + 1$ .

C.  $y = x^3 + 2x + 1$ .

D.  $y = \frac{x+1}{x+2}$ .

**Câu 22:** Cho lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = a$ , góc giữa đường thẳng  $A'C$  và mặt phẳng  $(AA'B'B)$  bằng  $30^\circ$ . Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$ . Tính theo  $a$  bán kính  $R$  của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $A'.ABC$ ?

A.  $R = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ .

B.  $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ .

C.  $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

D.  $R = \frac{a\sqrt{30}}{6}$ .

**Câu 23:** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh bằng  $a\sqrt{2}$ . Tam giác  $SAD$  cân tại  $S$  và mặt bên  $(SAD)$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích của khối chóp  $S.ABCD$  bằng  $\frac{4}{3}a^3$ . Tính khoảng cách  $h$  từ điểm  $B$  đến mặt phẳng  $(SCD)$ ?

A.  $h = \frac{2}{3}a$ .

B.  $h = \frac{3}{4}a$ .

C.  $h = \frac{8}{3}a$ .

D.  $h = \frac{4}{3}a$ .

**Câu 24:** Ông Bình xây một hồ nước dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng  $18 m^3$ , đáy hồ là một hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500 000 đồng cho mỗi mét vuông. Chi phí thấp nhất để xây hồ là

- A. 18 triệu đồng.      B. 19 triệu đồng.      C. 20 triệu đồng.      D. 16 triệu đồng.

**Câu 25:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = (1-m)x^4 + mx^2 + m^2 - 2$  có một cực đại và hai cực tiểu?

A.  $0 < m < 1$

B.  $m < 0$

C.  $m < 0$  hoặc  $m > 1$

D.  $m > 1$

**Câu 26:** Tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x}{x-m}$  nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$  là

A.  $0 < m < 1$ .

B.  $0 \leq m < 1$ .

C.  $m > 1$ .

D.  $0 < m \leq 1$ .

**Câu 27:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt

$$\log_3(1-x^2) + \log_{\frac{1}{3}}(x+m-4) = 0$$

A.  $-\frac{1}{4} < m < 0$ .

B.  $5 \leq m \leq \frac{21}{4}$ .

C.  $5 < m < \frac{21}{4}$ .

D.  $-\frac{1}{4} \leq m \leq 2$ .

**Câu 28:** Một người gửi tiết kiệm 20 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất  $7,2\%$  / năm và tiền lãi hàng tháng được nhập vào vốn, giả sử lãi suất không đổi. Hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được số tiền 200 triệu đồng, kết quả gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 50 năm.

B. 10 năm.

C. 41 năm.

D. 33 năm.

**Câu 29:** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình  $x+1 = m\sqrt{2x^2+1}$  có hai nghiệm phân biệt?

A.  $\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

B.  $-\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{6}$ .

C.  $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

D.  $m > \frac{\sqrt{6}}{6}$ .

**Câu 30:** Một hình trụ có bán kính  $R = 2a$  và thiết diện qua trục là hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ đó bằng

A.  $\frac{8}{3}\pi a^2$ .

B.  $16\pi a^2$ .

C.  $4\pi a^2$ .

D.  $8\pi a^2$ .

**TỰ LUẬN: ( 4 điểm )**

1/ Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số sau:

$$y = \frac{\ln x}{x} \text{ trên đoạn } [1; e^2]$$

2/ Giải bất phương trình sau:

$$5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$$

3/ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số:  $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m+6)x + m$  có cực đại và cực tiểu?

4/ Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $2a$ . Biết rằng  $O'$  là tâm của hình vuông  $A'B'C'D'$  và  $(C)$  là hình tròn ngoại tiếp đáy  $ABCD$ . Diện tích xung quanh của hình nón có đỉnh  $O'$  và đáy là hình tròn  $(C)$  ?

**HK 1 2019 - 2020**

**I/ TRẮC NGHIỆM: ( 6 điểm )( 60 phút )**

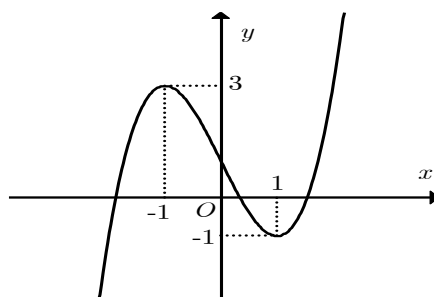
**Câu 1:** Thể tích khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng  $a$  là

A.  $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ .      B.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$ .      C.  $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$ .      D.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$ .

**Câu 2:** Khoảng đồng biến của hàm số:  $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$  là

A.  $(-\infty; 0)$ .      B.  $(1; 3)$ .      C.  $(0; 3)$ .      D.  $(2; +\infty)$ .

**Câu 3:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $f(x) + m - 2018 = 0$  có duy nhất một nghiệm.



A.  $m = 2015 \vee m = 2019$ .

B.  $2015 < m < 2019$ .

C.  $m \leq 2015 \vee m \geq 2019$ .

D.  $m < 2015 \vee m > 2019$ .

**Câu 4:** Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{3}{3x+1} + \sqrt{x}$  là

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

**Câu 5:** Cho hình trụ  $(T)$  có chiều cao  $h$ , độ dài đường sinh  $l$ , bán kính đáy  $r$ . Ký hiệu  $S_{xq}$  là diện tích xung quanh của  $(T)$ . Công thức nào sau đây là đúng?

A.  $S_{xq} = \pi r l$ .

B.  $S_{xq} = \pi r h$ .

C.  $S_{xq} = 2\pi r^2 h$ .

D.  $S_{xq} = 2\pi r l$ .

**Câu 6:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $8(\text{cm})$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Quay hình vuông  $ABCD$  xung quanh  $MN$ . Diện tích xung quanh của hình trụ tạo thành là

A.  $64\pi(\text{cm}^2)$ .

B.  $32\pi(\text{cm}^2)$ .

C.  $96\pi(\text{cm}^2)$ .

D.  $126\pi(\text{cm}^2)$ .

**Câu 7:** Cho hình nón ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều có chiều cao bằng  $4\text{cm}$ , đáy là hình vuông cạnh  $3\sqrt{2}\text{cm}$ . Diện tích xung quanh của hình nón là

A.  $12\pi(\text{cm}^2)$ .

B.  $15\pi(\text{cm}^2)$ .

C.  $20\pi(\text{cm}^2)$ .

D.  $30\pi(\text{cm}^2)$ .

**Câu 8:** Cho  $a, b > 0$  và  $a, b \neq 1$ , biểu thức  $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$  có giá trị bằng bao nhiêu?

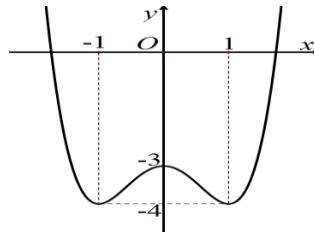
A. 6.

B. 24.

C. 12.

D. 18.

**Câu 9:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Xác định tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $|f(x)| = m$  có đúng 2 nghiệm thực phân biệt.



A.  $3 < m < 4$ .

B.  $-4 < m < 0$ .

C.  $m > 4 \vee m = 0$ .

D.  $0 < m < 3$ .

**Câu 10:** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$  ( $m$  là tham số). Tìm tất cả tham số thực  $m$  để hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 2$ . A.  $m = 1$ . B.  $m = 3$ . C.  $m = 2$ . D.  $m = 0$ .

**Câu 11:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$  và  $SC = 2a$ . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ .

A.  $a\sqrt{2}$ .

B.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

C.  $a$ .

D.  $2a$ .

**Câu 12:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = (1 + x - 2x^2)^n$ , với  $n$  là một số nguyên âm.

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$ .

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

C.  $D = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ .

D.  $D = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ .

**Câu 13:** Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

|      |           |            |           |            |           |
|------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |            | 1         |            | $+\infty$ |
| $y'$ |           | -          |           | -          |           |
| $y$  | -1        | $\nearrow$ | $-\infty$ | $\nwarrow$ | -1        |

A.  $y = \frac{-x+3}{x-1}$ .

B.  $y = \frac{x+3}{x-1}$ .

C.  $y = \frac{-x-2}{x-1}$ .

D.  $y = \frac{-x-3}{x-1}$ .

**Câu 14:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  tại điểm  $A(3;1)$  là

A.  $y = 9x + 2$ .

B.  $y = -9x - 3$ .

C.  $y = 9x - 26$ .

D.  $y = -9x - 26$ .

**Câu 15:** Số nghiệm của phương trình  $7^x - 7^{1-x} = 6$  là

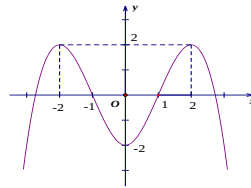
A. Vô nghiệm.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

**Câu 16:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hỏi điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là điểm nào ?

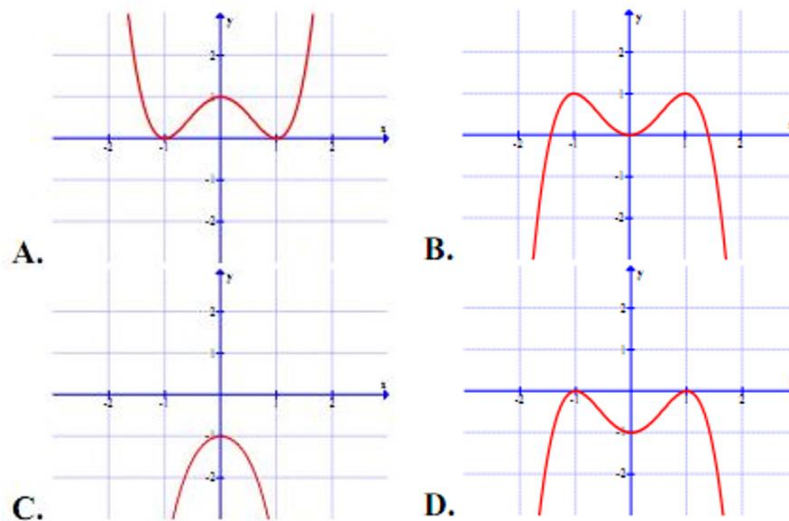
A.  $M(0; -2)$ .B.  $x = -2$ .C.  $N(2; 2)$ .D.  $y = -2$ .

**Câu 17:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số có bảng biến thiên sau trên khoảng  $[-2; 3]$  là

|      |    |    |    |   |   |
|------|----|----|----|---|---|
| $x$  | -2 | -1 | 1  | 3 |   |
| $y'$ | +  | 0  | -  | 0 | + |
| $y$  | 0  | 1  | -3 | 7 |   |

A.  $\min_{[-2;3]} y = 1$ .B.  $\min_{[-2;3]} y = -3$ .C.  $\min_{[-2;3]} y = 7$ .D.  $\min_{[-2;3]} y = 0$ .

**Câu 18:** Đồ thị hàm số  $y = -x^4 + 2x^2 - 1$  có dạng hình nào trong 4 hình vẽ sau



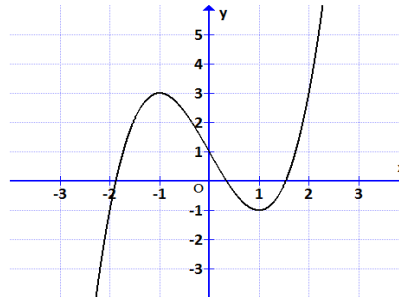
A. Hình A.

B. Hình C.

C. Hình B.

D. Hình D.

**Câu 19:** Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A.  $y = -x^3 - 3x^2 + 1$ .    B.  $y = x^3 - 3x - 1$ .    C.  $y = -x^3 + 3x + 1$ .    D.  $y = x^3 - 3x + 1$ .

**Câu 20:** Tìm tọa độ giao điểm  $M$  của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}$  và  $y = x + 1$ .

A.  $M(3; 1)$ .    B.  $M(2; -3)$ .    C.  $M(-1; 0)$ .    D.  $M(2; 2)$ .

**Câu 21:** Cho khối chóp  $SABC$  có đáy là tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $SA$  vuông góc với đáy  $SA = 4$ ,  $AB = 6$ ,  $BC = 10$ . Tính thể tích khối chóp  $SABC$ ?

A.  $V = 192$ .    B.  $V = 40$ .    C.  $V = 32$ .    D.  $V = 24$ .

**Câu 22:** Cho khối chóp  $S.ABC$  có  $SA$  vuông góc với  $(ABC)$ , đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ ,  $BC = 2a$ , góc giữa  $SB$  và  $(ABC)$  là  $30^\circ$ . Tính thể tích khối chóp  $S.ABC$ .

A.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ .    B.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$ .    C.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ .    D.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 23:** Một khối trụ  $(T)$  có thể tích bằng  $81\pi(\text{cm}^3)$  và có đường sinh gấp ba lần bán kính đáy. Độ dài đường sinh của  $(T)$  là    A.  $12(\text{cm})$ .    B.  $3(\text{cm})$ .    C.  $6(\text{cm})$ .    D.  $9(\text{cm})$ .

**Câu 24:** Cho  $\log_3 15 = a$ . Tính  $A = \log_{25} 15$  theo  $a$  ta được

A.  $A = \frac{2a}{a-1}$ .    B.  $A = \frac{a}{2(a-1)}$ .    C.  $A = \frac{a}{a-1}$ .    D.  $A = \frac{a}{2(1-a)}$ .

**Câu 25:** Tìm tập nghiệm bất phương trình  $\log_{0,5}(4x+11) < \log_{0,5}(x^2+6x+8)$ .

A.  $S = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ .    B.  $S = (-3; 1)$ .  
C.  $S = (-2; 1)$ .    D.  $S = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ .

**Câu 26:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ

|      |           |   |   |   |    |   |           |
|------|-----------|---|---|---|----|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |   | 1 |   | 3  |   | $+\infty$ |
| $y'$ |           | + | 0 | - | 0  | + |           |
| $y$  | $-\infty$ |   | 4 |   | -2 |   | $+\infty$ |

Tìm tất cả các giá trị  $m$  để bất phương trình  $y = f(\sqrt{x-1}+1) \leq m$  có nghiệm?

A.  $m \geq -2$ .

B.  $m \geq 4$ .

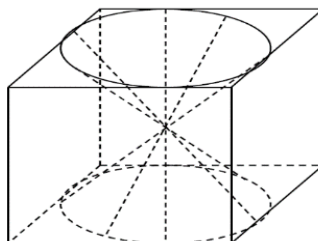
C.  $m = 1$ .

D.  $m \geq 0$ .

**Câu 27:** Anh Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn là một quý với lãi suất 3% một quý. Sau đúng 6 tháng anh Nam gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Hỏi sau 1 năm số tiền (cả vốn lẫn lãi) anh Nam nhận được là bao nhiêu? (Giả sử lãi suất không thay đổi).

A. 209,25 triệu đồng. B. 208,25 triệu đồng. C. 210,45 triệu đồng. D. 218,64 triệu đồng.

**Câu 28:** Một hình hộp đứng có đáy là hình vuông chứa đồng hồ cát như hình vẽ. Tỉ số thể tích của đồng hồ cát và phần còn lại giữa đồng hồ cát và hình hộp đứng là



A.  $\frac{\pi}{24-\pi}$ .

B.  $\frac{\pi}{12-\pi}$ .

C.  $\frac{\pi}{24-2\pi}$ .

D.  $\frac{\pi}{6-\pi}$ .

**Câu 29:** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |    |                |   |                |               |           |
|---------|-----------|----|----------------|---|----------------|---------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | -1 | 0              | 1 | 2              | 3             | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+\infty$ |    | $\frac{5}{12}$ |   | $-\frac{2}{3}$ |               | $+\infty$ |
|         |           | 0  |                |   | $-\frac{9}{4}$ | $\frac{8}{3}$ |           |

Đặt  $g(x) = f(x) - \ln(x^2 + 1)$ . Khẳng định nào sau đây sai?

- A.**  $g(3) < g(4)$ .      **B.**  $g(-1) < g(0)$ .      **C.**  $g(1) > g(2)$ .      **D.**  $g(-2) > g(-1)$ .

**Câu 30:** Cho phương trình:  $2^{x^3+x^2-2x+m} - 2^{x^2+x} + x^3 - 3x + m = 0$  (1). Để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt, tập hợp các giá trị thực của tham số  $m$  có dạng  $(a; b)$ . Tổng  $a + 2b$  bằng

- A.** 0.      **B.** 1.      **C.** 2.      **D.** -4.

## ĐỀ GIỮA KỲ I 2020

## CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM (30 CÂU)

**Câu 1:** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x + 6}$  có bao nhiêu tiệm cận ngang và tiệm cận đứng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

**Câu 2:** Cho khối lập phương. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**.

- A. Là khối đa diện đều loại  $\{3;4\}$ . B. Số đỉnh của khối lập phương bằng 6.  
C. Số mặt của khối lập phương bằng 6. D. Số cạnh của khối lập phương bằng 8.

**Câu 3:** Đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 2}$  có bao nhiêu tiệm cận ngang và tiệm cận đứng

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

**Câu 4:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $6a$ ,  $SA$  vuông góc với đáy, góc  $SBA = 60^\circ$ . Tính thể tích của khối chóp  $S.ABCD$ .

- A.  $72a^3$ . B.  $72\sqrt{3}a^3$ . C.  $216\sqrt{3}a^3$ . D.  $216a^3$ .

**Câu 5:** Hàm số  $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$  nghịch biến trên khoảng nào?

- A.  $(-\infty; -1)$ . B.  $(2; +\infty)$ . C.  $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ . D.  $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ .

**Câu 6:** Bảng biến thiên dưới đây là của hàm số nào?

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$      | $+\infty$ |
| $y'$ | +         |           | +         |
| $y$  | 2         | $+\infty$ | $-\infty$ |

- A.  $y = \frac{2x-3}{x-1}$ . B.  $y = \frac{2x+3}{x+1}$ . C.  $y = \frac{-2x-3}{x+1}$ . D.  $y = \frac{2x-3}{x+1}$ .

**Câu 7:** Hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$  nghịch biến trên khoảng nào?

- A.  $\mathbb{R}$ . B.  $(-\infty; -1)$ . C.  $(-1; 1)$ . D.  $(-1; 3)$ .

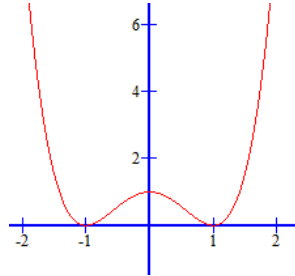
**Câu 8:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ , hình chiếu của  $A'$  trên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với trọng tâm  $O$  của tam giác  $ABC$ , góc giữa mặt bên  $(ABB'A')$  và mặt phẳng đáy bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ .

- A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ . B.  $a^3\sqrt{3}$ . C.  $3a^3\sqrt{3}$ . D.  $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ .

**Câu 9:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác  $ABC$  có  $CB = 2a\sqrt{3}$ ,  $CA = 2a$  và góc  $ACB$  bằng  $30^\circ$ ,  $SA$  vuông góc với đáy và góc giữa  $SC$  và  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích của khối chóp  $S.ABC$

- A.  $3a^3$ .                      B.  $2a^3$ .                      C.  $9a^3$ .                      D.  $6a^3$ .

**Câu 10:** Đồ thị dưới đây là của hàm số nào?



- A.  $y = -x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ .                      B.  $y = x^4 - 2x^2$ .  
C.  $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ .                      D.  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ .

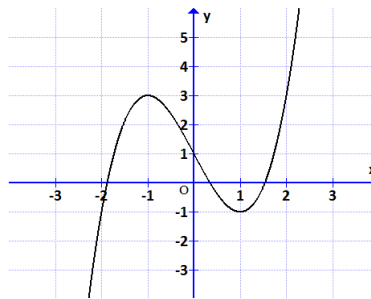
**Câu 11:** Khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng  $a$ , chiều cao bằng  $3a$  thì có thể tích bằng:

- A.  $a^3\sqrt{3}$ .                      B.  $\frac{a^3}{3}$ .                      C.  $a^3$ .                      D.  $3a^3$ .

**Câu 12:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{2x-1}{3-x}$  trên đoạn  $[0; 2]$  là:

- A. 2.                      B. 0.                      C.  $-\frac{1}{3}$ .                      D. 3.

**Câu 13:** Đồ thị sau đây là của hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$ . Với giá trị nào của tham số  $m$  thì phương trình  $x^3 - 3x - m = 0$  có đúng một nghiệm thực phân biệt.



- A.  $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$ .                      B.  $-2 < m < 2$ .                      C.  $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$ .                      D.  $-1 < m < 3$ .

**Câu 14:** Khối lập phương có cạnh bằng  $a$  có thể tích bằng:

- A.  $a^3\sqrt{3}$ .                      B.  $a^3$ .                      C.  $\frac{a^3}{3}$ .                      D.  $3a^3$ .

**Câu 15:** Cho lăng trụ đứng  $A'B'C'D'.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a\sqrt{3}$ . Tính thể tích của khối lăng trụ  $A'B'C'D'.ABCD$ .

- A.  $\frac{9a^3\sqrt{3}}{4}$ .      B.  $\frac{3a^3}{4}$ .      C.  $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$ .      D.  $\frac{9a^3}{4}$ .

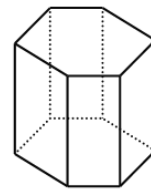
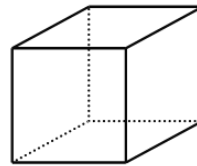
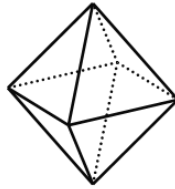
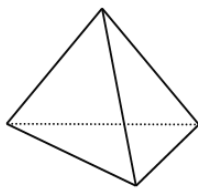
**Câu 16:** Với giá trị nào của tham số  $m$  thì hàm số  $y = x^3 - mx^2 + x - 3$  đạt cực đại tại  $x = -1$ ?

- A.  $m \in \mathbb{R}$ .      B.  $m = -2$ .      C.  $m \in \emptyset$ .      D.  $m \neq -2$ .

**Câu 17:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật cạnh  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{3}$ . Biết rằng tam giác  $SAB$  cân tại  $S$  và nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách giữa  $AB$  và  $SC$  bằng  $\frac{3a}{2}$ . Tính thể tích của khối chóp  $S.ABCD$

- A.  $\sqrt{3}a^3$ .      B.  $2\sqrt{3}a^3$ .      C.  $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$ .      D.  $3\sqrt{3}a^3$ .

**Câu 18:** Hình đa diện nào dưới đây **không** là hình đa diện đều



- A. Tứ diện đều.      B. Bát diện đều.      C. Hình lập phương.      D. Lăng trụ lục giác đều.

**Câu 19:** Hàm số  $y = x^4 - 4x^2 - 3$  có giá trị cực đại bằng:

- A.  $-7$ .      B.  $-3$ .      C.  $0$ .      D.  $\sqrt{2}$ .

**Câu 20:** Với giá trị nào của tham số  $m$  thì hàm số  $y = x^3 - 6mx^2 + 2$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ ?

- A.  $m = 0$ .      B.  $m \geq 0$ .      C.  $m < 0$ .      D.  $m > 0$ .

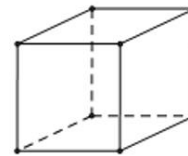
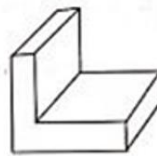
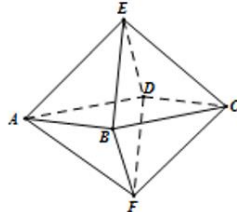
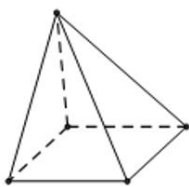
**Câu 21:** Hình nào dưới đây **không** phải là hình đa diện lồi

Hình 1.

Hình 2.

Hình 3.

Hình 4.

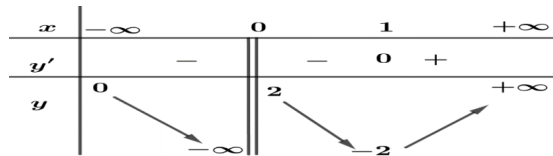


- A. Hình 4.      B. Hình 3.      C. Hình 2.      D. Hình 1.

**Câu 22:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{4-x}$  là:

- A.  $2\sqrt{3}$ .      B.  $\sqrt{6}$ .      C.  $-2$ .      D.  $1$ .

**Câu 23:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

**Câu 24:** Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+1}$ . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Tập xác định của hàm số là  $D = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ .  
 B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.  
 C. Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; +\infty)$ .  
 D. Hàm số có cực trị.

**Câu 25:** Đồ thị hàm số:  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  là (C). Biết tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng

(d):  $y = -3x + 15$ . Phương trình tiếp tuyến đó là

- A.  $y = -3x + 11$  và  $y = -3x - 1$ . B.  $y = 3x + 11$ .  
 C.  $y = -3x - 1$ . D.  $y = -3x + 11$ .

**Câu 26:** Cho hàm số  $y = x + \frac{4}{x}$ . Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $(0; +\infty)$  bằng

- A. 4. B. 2. C. -2. D. -4.

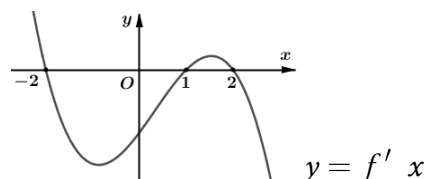
**Câu 27:** Hàm số nào sau đây có giá trị lớn nhất trên tập xác định?

- A.  $y = 2x^4 - x^2 + 1$ . B.  $y = \frac{x-2}{x+1}$ .  
 C.  $y = -x^4 + 3x^2 + 2$ . D.  $y = -x^3 + 2x^2 + 4x - 2$ .

**Câu 28:** Cho phương trình  $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}$ . Có bao nhiêu giá trị  $m$  nguyên dương để phương trình có nghiệm?

- A. vô số. B. 9. C. 10. D. 6.

**Câu 29:** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên dưới và  $f(-2) = f(2) = 0$



Hàm số  $g(x) = [f(x)]^2$  nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A.  $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ .

B.  $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ .

C.  $-2; -1$ .

D.  $-1; 1$ .

**Câu 30:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2 - 2x$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $g(x) = f(x^2 - 8x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

**TỰ LUẬN.**

**Câu 1:** Khảo sát sự biến thiên và tìm cực trị hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 2$

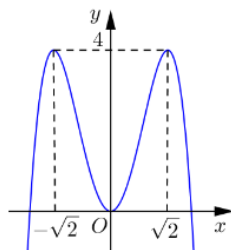
**Câu 2:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x+m}{x+1}$  đồng biến trên từng khoảng xác định.

**Câu 3:** Tìm GTNN của hàm số  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$  trên  $(1; +\infty)$ .

**Câu 4:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  có  $BC = 3a$ ,  $CA = 5a$ ,  $SA$  vuông góc với mp( $ABC$ ) và góc giữa  $SB$  và mp( $ABC$ ) bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích của khối chóp  $S.ABC$ .

**ĐỀ HỌC KỲ I 2020**

**Câu 1:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị (C) như hình dưới. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\sqrt{2}; 0)$ .

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ .

C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -\sqrt{2})$ .

D. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; 1)$ .

**Câu 2:** Dựa vào bảng biến thiên của hàm số, chọn câu khẳng định **đúng**.

|      |           |      |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $3$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $-$  | $0$ | $+$       |
| $y$  | $-\infty$ | $5$  | $2$ | $+\infty$ |

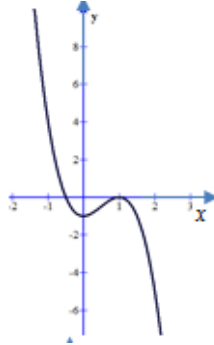
A. Hàm số đồng biến trên  $(-2; +\infty)$

B. Hàm số nghịch biến trên  $(-2; 2)$

C. Hàm số có 2 cực trị

D. Hàm số có giá trị cực tiểu là 3

**Câu 3:** Đồ thị dưới là của hàm số  $y = -2x^3 + 3x^2 - 1$ , với giá trị nào của tham số  $m$  thì phương trình  $2x^3 - 3x^2 + 2m = 0$  có ba nghiệm phân biệt.



A.  $0 \leq m \leq 1$

B.  $0 < m < \frac{1}{2}$

C.  $-1 < m < 0$

D.  $-1 \leq m \leq 0$

**Câu 4:** Cho tứ diện đều độ dài cạnh bằng  $a$ , có một đỉnh trùng với đỉnh hình nón, 3 đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Khi đó diện tích xung quanh của hình nón bằng

A.  $\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$

B.  $\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{3}$

C.  $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{3}$

D.  $\sqrt{3}\pi a^2$

**Câu 5:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - mx^2 + x + 1$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

A.  $m \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

B.  $m \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$

C.  $m \in (0; +\infty)$

D.  $m \in \emptyset$

**Câu 6:** Cho  $a$  là số thực dương. Biểu thức  $a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{a}$  viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là

A.  $a^{\frac{6}{5}}$

B.  $a^{\frac{1}{3}}$

C.  $a^{\frac{7}{6}}$

D.  $a^{\frac{11}{6}}$

**Câu 7:** Tìm giá trị tham số  $m$  để đường thẳng  $(d): mx - y + m = 0$  cắt đường cong  $(C): y = x^3 - 3x^2 + 4$  tại ba điểm phân biệt  $A, B$  và  $C(-1; 0)$  sao cho tam giác  $AOB$  có diện tích bằng  $5\sqrt{5}$ . (Với  $O$  là gốc tọa độ).

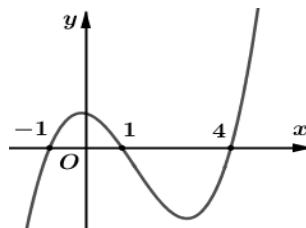
A.  $m = 4$

B.  $m = 6$

C.  $m = 5$

D.  $m = 3$

**Câu 8:** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên dưới



Hàm số  $g(x) = 2^{f(3-2x)}$  đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A.  $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ .

B.  $-\infty; 1$ .

C.  $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ .

D.  $1; 2$ .

**Câu 9:** Tính bán kính  $r$  của khối cầu có thể tích là  $V = 36\pi(\text{cm}^3)$ .

A.  $r = 9(\text{cm})$ .

B.  $r = 4(\text{cm})$ .

C.  $r = 3(\text{cm})$ .

D.  $r = 6(\text{cm})$ .

**Câu 10:** Hàm số  $y = 13^{x^2-3x}$  có đạo hàm là

A.  $y' = 13^{x^2-3x} \ln 3$ .

B.  $y' = (2x-3)13^{x^2-3x} \cdot \ln 13$ .

C.  $y' = (x^2-3x)13^{x^2-3x-1}$ .

D.  $y' = (2x-3)13^{x^2-3x}$ .

**Câu 11:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA$  vuông góc với mp( $ABC$ ), đáy là tam giác  $ABC$  có  $AB = AC = 2a$  và góc  $BAC = 120^\circ$ . Biết góc mp( $SBC$ ) và mp( $ABC$ ) bằng  $\alpha$  với  $\tan \alpha = 2$ . Hãy tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ .

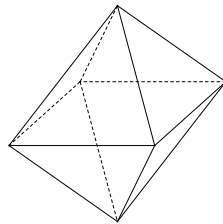
A.  $a\sqrt{2}$

B.  $a\sqrt{3}$

C.  $a\sqrt{5}$

D.  $2a$

**Câu 12:** Hình bát diện đều (tham khảo hình vẽ) có bao nhiêu cạnh?



A. 12.

B. 16.

C. 20.

D. 8.

**Câu 13:** Cho khối chóp  $S.ABC$  có  $SA$  vuông góc với đáy,  $SA = 4, AB = 6, BC = 10$  và  $CA = 8$ . Tính thể tích  $V$  của khối chóp đã cho.

A.  $V = 40$ .

B.  $V = 32$ .

C.  $V = 24$ .

D.  $V = 192$ .

**Câu 14:** Hàm số  $y = \log_{\frac{1}{3}} x^2 - x + 2$  có đạo hàm là

A.  $y' = \frac{2x-1}{x^2-x+2 \cdot \ln 3}$ .

B.  $y' = \frac{2x-1}{x^2-x+2 \cdot \ln \frac{1}{3}}$ .

C.  $y' = \frac{1-2x}{x^2-x+2 \cdot \ln 3}$ .

D.  $y' = \frac{2x-1}{x^2-x+2}$ .

**Câu 15:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân với  $AB = AC = a, BAC = 120^\circ$ , mặt phẳng  $(AB'C')$  tạo với đáy một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích  $V$  của khối lăng trụ đã cho.

A.  $V = \frac{9a^3}{8}$ .

B.  $V = \frac{3a^3}{4}$ .

C.  $V = \frac{a^3}{8}$ .

D.  $V = \frac{3a^3}{8}$ .

**Câu 16:** Hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m^2-4)x + 2$  đạt được cực đại tại  $x = 1$  khi

A.  $m = -1$ .

B.  $m = -3$ .

C.  $m = 1$  hoặc  $m = -3$ .

D.  $m = 1$ .

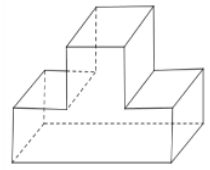
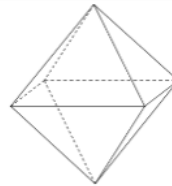
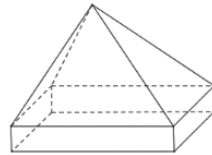
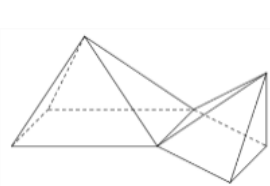
**Câu 17:** Đồ thị hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$  có 2 điểm cực trị có tọa độ là:

- A. (3; 2); (-1; -14)      B. (-2; 4); (5; 22)      C. (1; 6); (3; 2)      D. (1; 6); (2; 2)

**Câu 18:** Số nghiệm phương trình:  $9^x - 3^x - 6 = 0$  là:

- A. 3      B. 1      C. 2      D. 0

**Câu 19:** Gọi  $n$  là số hình đa diện lồi trong bốn hình dưới. Giá trị  $n$  là .



- A.  $n = 2$       B.  $n = 3$ .      C.  $n = 4$ .      D.  $n = 1$ .

**Câu 20:** Nghiệm của phương trình  $2^{2x+1} = 32$  là

- A.  $x = 3$ .      B.  $x = \frac{5}{2}$ .      C.  $x = \frac{3}{2}$ .      D.  $x = 2$ .

**Câu 21:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$  (1). Tiếp tuyến với đồ thị hàm số (1) và song song với đường thẳng  $3x + y - 2 = 0$  có phương trình :

- A.  $y = -3x + 5$ ;  $y = -3x + 3$       B.  $y = -3x - 3$ ;  $y = -3x - 19$   
C.  $y = -3x + 3$       D.  $y = -3x + 5$

**Câu 22:** Bất phương trình  $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) \leq 2 - \log_2 5$  có tập nghiệm S là:

- A.  $S = -\infty; -1 \cup 2; +\infty$       B.  $S = [-1; 2]$   
C.  $S = [-2; 1]$       D.  $S = (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$

**Câu 23:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng 4 và biết  $CC' = 5$ . Tính thể tích  $V$  của khối lăng trụ đã cho.

- A.  $V = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ .      B.  $V = \frac{16}{3}$ .      C.  $V = 20\sqrt{3}$ .      D.  $V = 4\sqrt{3}$ .

**Câu 24:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |      |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $2$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  |           | $4$  | $-5$ | $2$       |     |

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số có bốn điểm cực trị.      B. Hàm số không có cực đại.  
C. Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = -5$ .      D. Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 2$ .

**Câu 25:** Hàm số nào đồng biến trên  $\mathbb{R}$  ?

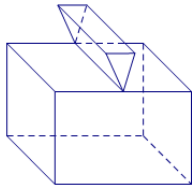
A.  $y = \sqrt{x^2 + 1}$ .

B.  $y = x^2$ .

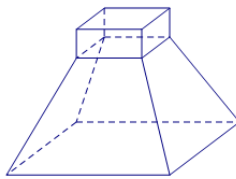
C.  $y = x^3 + 3x$ .

D.  $y = \frac{x}{x+1}$ .

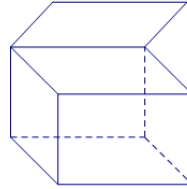
**Câu 26:** Biết các hình dưới đây tạo thành từ hữu hạn các đa giác. Hình nào là hình đa diện



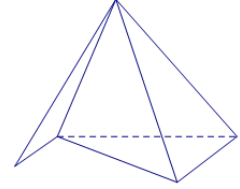
A.



B.



C.



D.

**Câu 27:** Tích các nghiệm của phương trình  $4\log_{25}\sqrt{x-2} - \log_{\frac{1}{5}}(10-x) = 1 + \log_5 3$  là

A. 35

B. -32

C. 28

D. -18

**Câu 28:** Hàm số  $y = (4 - x^2)^{\frac{3}{5}}$  có tập xác định là:

A.  $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ .

B.  $\mathbb{R}$

C.  $(-2; 2)$ .

D.  $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ .

**Câu 29:** Số nghiệm nguyên của bất phương trình  $2^{2+x} - 2^{2-x} < 15$  lớn hơn -2 là

A. 3

B. 5

C. 0

D. vô số

**Câu 30:** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sqrt{6-3x}$  trên đoạn  $[-1; 1]$

A.  $\min_{[-1;1]} y = 0$ .

B.  $\min_{[-1;1]} y = 3$ .

C.  $\min_{[-1;1]} y = -1$ .

D.  $\min_{[-1;1]} y = \sqrt{3}$ .

**Câu 31:** Tổng các nghiệm của phương trình:  $\log_2(x^2 + 7x) = 3$  là:

A. 7

B. -7

C. -8

D. 8

**Câu 32:** Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2$ . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .

**Câu 33:** Kết luận nào sau đây về hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+1}$  là **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; +\infty)$ .

B. Hàm số luôn có ít nhất một điểm cực trị

C. Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ .D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; +\infty)$ .

**Câu 34:** Đồ thị hàm số nào sau đây có ba đường tiệm cận?

A.  $y = \frac{1-2x}{1+x}$

B.  $y = \frac{x}{x^2 - x + 9}$

C.  $y = \frac{x+3}{5x-1}$

D.  $y = \frac{1}{4-x^2}$

**Câu 35:** Nghiệm của bất phương trình:  $\log_2(3^x - 2) < 0$  là

A.  $\log_3 2 < x < 1$

B.  $x < \log_3 2$

C.  $0 < x < 1$

D.  $x > 1$

**Câu 36:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ , góc  $ABC$  bằng  $60^\circ$ . Mặt bên  $(SAB)$  là tam giác vuông cân tại  $S$  và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Tính thể tích  $V$  của khối chóp  $S.ABCD$ .

- A.  $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ .      B.  $V = a^3$ .      C.  $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ .      D.  $V = \frac{a^3}{3}$ .

**Câu 37:** Tập xác định của hàm số  $y = \log -x^2 - 2x + 3$  là

- A.  $-3; 1$ .      B.  $\mathbb{R} \setminus -3; 1$ .  
C.  $-\infty; -3 \cup 1; +\infty$ .      D.  $-\infty; -3] \cup [1; +\infty$

**Câu 38:** Tính thể tích  $V$  của khối trụ có bán kính đáy  $r = 4$  và chiều cao  $h = 4\sqrt{2}$ .

- A.  $V = 128\pi$       B.  $V = 64\sqrt{2}\pi$       C.  $V = 32\sqrt{2}\pi$       D.  $V = 32\pi$

**Câu 39:** Đạo hàm của hàm số  $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$  là

- A.  $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^2}}$ .      B.  $y' = \frac{2x + 1}{3\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^2}}$ .  
C.  $y' = \frac{\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^2}}{3}$ .      D.  $y' = \frac{2x + 1}{3\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$ .

**Câu 40:** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x - 4}$  có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và ngang?

- A. 3      B. 5      C. 2      D. 4

**Câu 41:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên sau:

|      |           |     |     |             |           |
|------|-----------|-----|-----|-------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 0   |     | 2           | $+\infty$ |
| $y'$ | +         | 0   | -   | 0           | +         |
| $y$  | $-\infty$ | ↗ 5 | ↘ 1 | ↗ $+\infty$ |           |

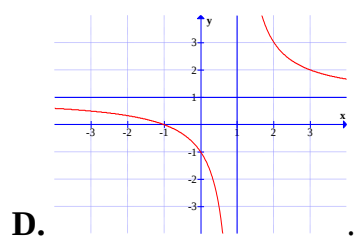
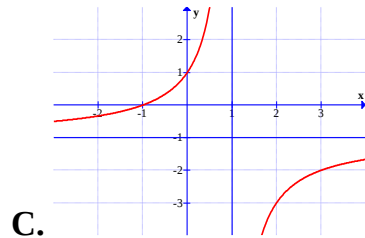
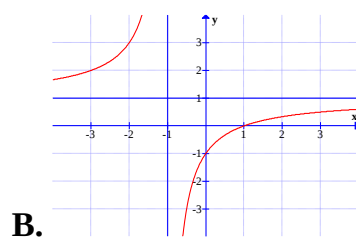
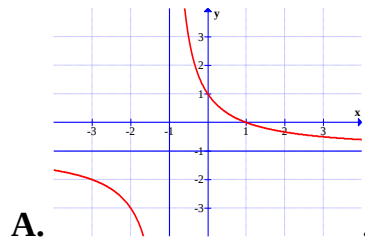
Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $f(x) = m$  có 3 nghiệm phân biệt

- A.  $m < 1$  hoặc  $m > 5$       B.  $1 \leq m \leq 5$       C.  $m \leq 1$  hoặc  $m \geq 5$       D.  $1 < m < 5$

**Câu 42:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$ ,  $AC = 2a$ . Hình chiếu vuông góc của  $A'$  trên mặt phẳng  $(ABC)$  là trung điểm của cạnh  $AC$ , đường thẳng  $A'B$  tạo với mặt phẳng  $(ABC)$  một góc  $45^\circ$ . Tính thể tích  $V$  của khối lăng trụ đã cho.

- A.  $V = 2\sqrt{2}a^3$ .      B.  $V = 2a^3$ .      C.  $V = \frac{1}{2}a^3$ .      D.  $V = a^3$ .

**Câu 43:** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{1-x}$  có dạng



**Câu 44:** Hàm số:  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1$  đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên  $[1; 3]$  tại điểm có hoành độ  $x_1; x_2$ . Khi đó tổng  $x_1 + x_2$  bằng

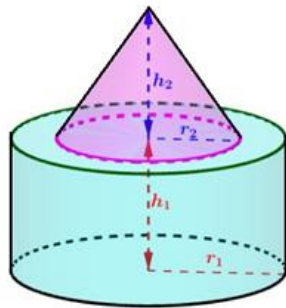
A. 4

B. 2

C. 5

D. 3

**Câu 45:** Một khối đồ chơi gồm một khối nón (N) xếp chồng lên một khối trụ (T). Khối trụ (T) có bán kính đáy và chiều cao lần lượt là  $r_1, h_1$ . Khối nón (N) có bán kính đáy và chiều cao lần lượt là  $r_2, h_2$  thỏa mãn  $r_2 = \frac{2}{3}r_1$  và  $h_2 = h_1$  (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng  $124 \text{ cm}^3$ , thể tích khối nón (N) bằng

A.  $62 \text{ cm}^3$ .B.  $15 \text{ cm}^3$ .C.  $108 \text{ cm}^3$ .D.  $16 \text{ cm}^3$ .

**Câu 46:** Một hình trụ có diện tích toàn phần là  $6\pi$ . Bán kính của khối trụ có thể tích lớn nhất là

A.  $R = \sqrt{3}$ .B.  $R = 2$ .C.  $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .D.  $R = 1$ .

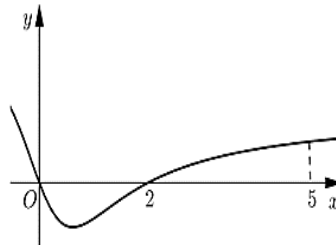
**Câu 47:** Cho khối chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ , đáy là hình vuông có  $AB = a$ ,  $SA = 2a$ . Tính thể tích  $V$  của khối chóp  $S.ABCD$ .

A.  $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{6}$ B.  $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{2}$ C.  $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}$ D.  $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$

**Câu 48:** Tập xác định của hàm số  $y = \left(\frac{x}{x-2}\right)^3$  là:

- A.  $D = (0; +\infty)$       B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$       C.  $D = (-\infty; 0)$       D.  $D = (-\infty; +\infty)$

**Câu 49:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  được cho như hình vẽ bên. Biết rằng  $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  và giá trị lớn nhất  $M$  của  $f(x)$  trên đoạn  $[0; 5]$ ?



- A.  $m = f(1), M = f(5)$ .      B.  $m = f(0), M = f(5)$ .  
C.  $m = f(2), M = f(0)$ .      D.  $m = f(2), M = f(5)$ .

**Câu 50:** Số các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\log_{\sqrt{2}} x - 1 = \log_2 mx - 8$  có hai nghiệm thực phân biệt là

- A. 3.      B. 4.      C. 5.      D. 2.

-----**HẾT**-----